

TARTU ÜLIKOOL  
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND  
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Laura Karu  
**Parameetriliste Bezier' liitkõverate  
konstrueerimine**

Matemaatika  
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: PhD Evely Kirsiaed

TARTU 2021

# PARAMEETRILISTE BEZIER' LIITKÕVERATE KONSTRUEERIMINE

Bakalaureusetöö  
Laura Karu

## Lühikokkuvõte

Bakalaureusetöös käsitletakse parameetriliste Bezier' liitkõverate konstrueerimist. Defineeritakse Bernsteini baaspolünoomi, Bezier' kõvera, polaarkuju ja Bezier' liitkõvera mõisted ning vaadeldakse nende tähtsamaid omadusi ja nendevahelisi seoseid. Tutvustatakse de Casteljau algoritmi ja uuritakse Bezier' kõverate ühendamist ja nii ruut- kui ka kuupkõveratega interpoleerimist. Defineeritakse *subdivision* kui osadeks jaotamine ning ka kui meetod olemasoleva polügoni (murdjoone) parendamiseks tippude lisamise teel. Tutvustatakse nelja *subdivision* algoritmi.

**CERCS teaduseriala:** P170 Arvutiteadus, arvutusmeetodid, süsteemid, juhtimine (automaatjuhtimisteooria).

**Märksõnad:** Bezier kõver, parameetrilne polünoom, geomeetiline modelleerimine, *subdivision*.

# CONSTRUCTION OF PARAMETRIC COMPOSITE BEZIER CURVES

Bachelor thesis  
Laura Karu

## Abstract

This Bachelor's thesis is focused on the construction of parametric Bezier composite curves. The concepts of Bernstein's basic polynomial, Bezier curve, blossom and Bezier composite curve are defined and their most important properties and their relations are considered. The de Casteljau algorithm is introduced and the combination of Bezier curves and interpolation with both quadratic and cubic curves is explored. Subdivision is defined as partitioning and also as a method to improve an existing polygon by adding vertices. Four subdivision algorithms are introduced.

**CERCS research specialisation:** P170 Computer science, numerical analysis, systems, control.

**Key Words:** Bezier curve, parametric polynomials, geometric modelling.

# Sisukord

<b>Sissejuhatus</b>	<b>3</b>
<b>1 Bezier' kõverad</b>	<b>5</b>
1.1 Bernsteini baaspolünoomid . . . . .	5
1.2 Polünoomi esitus Bezier' kujul . . . . .	8
1.3 De Casteljaui algoritm . . . . .	10
1.4 Bezier' kõvera diferentseerimine . . . . .	12
<b>2 Bezier' kõverate ühendamine</b>	<b>15</b>
2.1 Sisevõrrandid . . . . .	15
2.2 Perioodiline interpoleerimine Bezier' kõverate abil . . . . .	19
<b>3 Polaarkuju</b>	<b>25</b>
<b>4 <i>Subdivision</i></b>	<b>30</b>
4.1 <i>Subdivision</i> kui osadeks jaotamine . . . . .	30
4.2 Juhtpolügon kui Bezier' kõvera lähend . . . . .	31
4.3 <i>Subdivision</i> kui polügoni järjestikune parendamine . . . . .	33
4.4 <i>Subdivision</i> algoritmide analüüs . . . . .	38
<b>Kokkuvõte</b>	<b>41</b>

## Sissejuhatus

Käesoleva töö temaatika kuulub geomeetrilise modelleerimise valdkonda. IT terministandardi projekti (1998-2001) sõnastik defineerib mõiste geomeetriline modelleerimine kui manipuleeritaval kujul ruumilisi vorme esitava mudeli loomine arvutisüsteemil. Üldisemalt on tegemist ühe osaga arvutipõhisest geomeetrilisest kujundusest (ingl k *computer-aided geometric design* ehk *CAGD*) rakendusmatemaatika ja arvutusgeomeetria valdkonnast.

Teemasse sisseelamiseks on paslik rääkida veidi ajaloolist tausta mõnest võtmeisikust ja üldiselt teooria päritolust.

Sergei Natanovich Bernstein (1880-1968) oli vene ja Nõukogude Liidu matemaatik, kes tutvustas 1911. aastal polünoome, mis hiljem tema auks nimetati Bernsteini polünoomideks. Kahekümnenda sajandi keskpaigas, kui autode masstoodangu jaoks tuli otsida uusi viise, kuidas autosid kujundada, sai hoo sisse pindade parametrizeerimine. 1960. aastatel hakkasid Bernsteini polünoomi rakendamise vastu huvi tundma kaks prantsuse inseneri: Paul de Faget de Casteljau (1930-...) ning Pierre Etienne Bezier (1999-1910), kes töötasid vastavalt Citroëni ja Renault autotehastes. De Casteljau idee autokere kuju kirjeldada matemaatilisel viisil oli väga uuemeelne ajal, mil arvutid veel levinud ei olnud. Sarnaselt uuris ka Bezier, kuidas geomeetrilise modelleerimise abiga ära hoida auto kuju ebatäpsusi, mis olid lihtsad tekkima paberjoonistel või käega vormitud mudelitel. Pindade modelleerimise vajadust võibki lugeda arvutipõhise disaini käekäigu alguseks.

Huvitaval kombel töötasid Bezier ja de Casteljau kõverate ja pindade teooria välja teineteisest sõltumatult, kuid kuna Citroëni litsenside tõttu ei saanud de Casteljau enda tulemusi avalikustada ning Bezier avaldas enda uurimuse varem, siis kannab teooria just tema nime.

Tänapäeval on geomeetriline modelleerimine oluline osa arvutidisainist. Uuritakse enamasti kahemõõtmelisi kõveraid tasandil ja kolmemõõtmelisi pindasid ruumis, kuid teoreetiliselt on võimalik ka suuremõõtmelistes ruumides mudeleid tekitada. Kõige tüüpilisem Bezier' kõverate kasutus tasandil on fondid, nt ruut Bezier' kõveratega on määratud TrueType-fondid. Kolmemõõtmelisi mudeleid kasutatakse arhitektuuris ja geoloogias. Animafilmide loomisel tekitatakse 3D parameetrilised pinnad, mis kujutatakse kahemõõtmelisena ekraanile. Niisiis, geomeetrilisel modelleerimisel on palju tähtsaid rakendusi.

Georges de Rham (1903-1990) oli Šveitsi matemaatik, kes 1956. aastal tutvustas esimest *subdivision* algoritmi. Ta näitas, et algoritmi abil genereeritud funktsioonide jada koondub funktsiooniks, mis on kõikjal diferentseeruv, kuid mitte kuskil kaks korda diferentseeruv. George Merrill Chaikin (1944-2007) oli ameerika matemaatik, kes 1974. aastal tutvustas *subdivision*'it kui praktilist algoritmi kõverate kujundamiseks. Chaikini algoritm oli teerajajaks teistele *subdivision* algoritmide-

le. Kuna *subdivision* algoritmid on paindlikud ja neid on lihtne rakendada, siis on tegemist tõhusa meetodiga, et kujundada nii 2D kui ka 3D kõveraid ja pindu. Viimase paari aastakümne jooksul on need algoritmid aina enam rakendust leidnud (nt arvutigraafikas või animatsioonitööstuses) ja samas laienenud ka uutesse suundadesse.

Käesolev bakalaureusetöö tutvustab geomeetrilise modelleerimise temaatikat. Töös vaadeldakse parameetriliste kõveratega seonduvat, ei tegeleta parameetriliste pindadega. Töös kasutatud terminid on kooskõlas valdkonna terminoloogiaga, siin ei ole üritatud kasutada nn klassikalisemaid termineid: näiteks Bezier' kõverat võiks nimetada ka parameetriliseks polünoomiks ning Bezier' liitkõverat splineiks. Autori teada eestikeelne kirjandus antud valdkonnas puudub ja seetõttu on selline termin nagu *subdivision* töös kasutusel ingliskeelsena (ei ole õnnestunud leida eestikeelset tõlget, mis piisavalt täpselt kirjeldaks *subdivision*'i olemust).

Töö on valdavalt referatiivne, peamisteks allikateks on monograafiad [4], [6] ja [7]. Autori panus on materjali ja tõestuste detailne kirjapanek, erinevate näidete genereerimine ning joonistega illustreerimine. Tutvustatud algoritmid on autori poolt realiseeritud kasutades programmeerimiskeelt Python ning selle abil on valminud ka mitmed joonised.

Antud töö on jaotatud neljaks osaks.

Esimeses peatükis käsitletakse Bernsteini polünoome ja Bezier' kõveraid. Defineeritakse Bernsteini baaspolünoomi ja Bezier' kõvera mõisted ning vaadeldakse nende tähtsamaid omadusi. Ühtlasi tutvustatakse de Casteljau algoritmi, mis on üks otsene ja numbriliselt stabiilne viis Bezier' kõveral paiknevate punktide arvutamiseks. Leitakse Bezier' kõvera suvalist järku tuletised, mis leiavad kasutust järgnevas peatükis.

Teises peatükis uuritakse Bezier' kõverate ühendamist ja nii ruut- kui ka kuupkõveratega interpoleerimist. Defineeritakse liitkõvera mõiste ning kasutatakse eelnevas peatükis leitud seoseid, et määrata liitkõvera siledus. Ruutkõverate korral saab rääkida pidevalt diferentseeruvatest kõveratest, kuupkõverate korral kaks korda pidevalt diferentseeruvatest kõveratest. Geomeetrilise tähenduse paremaks selgitamiseks on toodud näiteid.

Kolmandas peatükis defineeritakse polünoomi polaarkuju mõiste, vaadeldakse selle omadusi ning seoseid Bezier' kõveratega.

Neljandas peatükis defineeritakse *subdivision* kui osadeks jaotamine ning ka kui meetod olemasoleva polügoni (murdjoone) parendamiseks tippude lisamise teel. Tutvustatakse nelja *subdivision* algoritmi ning analüüsitakse nende koonduvust ja omadusi.

# 1 Bezier' kõverad

Siin peatükis defineerime Bernsteinini polünoomi ja Bezier' kõvera mõisted ning tõestame mõned nende omadused. Uurime de Casteljau algoritmi, mis numbriliselt stabiilne viis Bezier' kõveral paiknevate punktide leidmiseks. Arvutame välja ka tuletised, mida läheb järgmises peatükis kõverate ühendamisel tarvis. Peatükk põhineb allikal [6].

## 1.1 Bernsteinini baaspolünoomid

Olgu  $\mathcal{P}_n$   $n$ -astme polünoomide ruum, st

$$\mathcal{P}_n = \{p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n, \quad a_i \in \mathbb{R}\}.$$

Funktsioonid  $1, t, t^2, \dots, t^n$  moodustavad baasi ruumis  $\mathcal{P}_n$ . Bernsteinini baaspolünoomid on alternatiivne võimalus ruumi  $\mathcal{P}_n$  baasi moodustamiseks.

**Definitsioon 1.** Bernsteinini  $n$ -astme baaspolünoomideks nimetatakse polünoome kujul

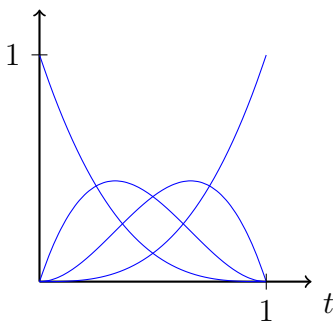
$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Kui  $i \notin \{0, \dots, n\}$ , siis kokkuleppe kohaselt  $B_i^n(t) = 0$ .

Juhul  $n = 3$  on Bernsteinini baaspolünoomid

$$B_0^3(t) = (1-t)^3, \quad B_1^3(t) = 3t(1-t)^2, \quad B_2^3(t) = 3t^2(1-t), \quad B_3^3(t) = t^3$$

esitatud joonisel 1.



Joonis 1: Bernsteinini baaspolünoomid juhul  $n = 3$ .

Bernsteini baaspolünoomidel on järgmised omadused:

**Omadus 1.** Polünoomid  $B_i^n$ ,  $i = 0, \dots, n$ , on lineaarselt sõltumatud.

*Tõestus.* Oletame, et leidub  $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^n$ , nii, et  $\sum_{i=0}^n \alpha_i B_i^n(t) = 0$ . Siis  $t \neq 1$  korral

$$0 = \frac{1}{(1-t)^n} \sum_{i=0}^n \alpha_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \binom{n}{i} \frac{t^i}{(1-t)^i} = \sum_{i=0}^n \alpha_i \binom{n}{i} x^i,$$

kus tegime muutuja vahetuse  $x = \frac{t}{1-t}$ . Teame, et polünoomid  $y^i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , on lineaarselt sõltumatud, seega  $\alpha_i = 0$ ,  $i = 0, \dots, n$ , mis tähendab, et ka Bernsteini baaspolünoomid on lineaarselt sõltumatud.  $\square$

**Omadus 2.** Polünoomid  $B_i^n$  ja  $B_{n-i}^n$ ,  $i = 0, \dots, n$ , on sümmeetrilised, st

$$B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t).$$

*Tõestus.* Definiitsiooni kohaselt

$$B_{n-i}^n(1-t) = \binom{n}{n-i} (1-t)^{n-i} (1-(1-t))^{n-(n-i)} = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = B_i^n(t).$$

$\square$

**Omadus 3.** Polünoomid  $B_i^n$ ,  $i = 0, \dots, n$ , on vahemikus  $(0, 1)$  positiivsed

$$B_i^n(t) > 0, \quad t \in (0, 1).$$

*Tõestus.* Fikseerime  $t \in (0, 1)$ . Siis  $t^i > 0$ ,  $(1-t)^{n-i} > 0$ , seega  $B_i^n(t) > 0$ .  $\square$

**Omadus 4.** Lõigu  $[0, 1]$  otspunktides on polünoomidel  $B_i^n$ ,  $i = 0, \dots, n$ , järgmised väärtused

$$B_i^n(0) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad B_i^n(1) = \begin{cases} 0, & i = 0, \dots, n-1, \\ 1, & i = n. \end{cases}$$

*Tõestus.* Olgu  $i = 0$ , siis

$$B_0^n(0) = \binom{n}{0} 0^0 (1-0)^{n-0} = 1$$

ja

$$B_n^n(1) = \binom{n}{n} 1^n (1-1)^{n-n} = 1.$$

Olgu  $i > 0$ , siis

$$B_i^n(0) = \binom{n}{0} 0^i (1-0)^{n-i} = 0.$$

Kui  $i < n$ , siis

$$B_i^n(1) = \binom{n}{i} 1^i (1-1)^{n-i} = 0.$$

□

**Omadus 5.** Polünoomid  $B_i^n$ ,  $i = 0, \dots, n$ , moodustavad ühejaotuse, st

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

*Tõestus.* Binoomvalemi põhjal

$$1 = (t + (1-t))^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{i=0}^n B_i^n(t).$$

□

**Omadus 6.** Polünoomid  $B_i^n$ ,  $i = 0, \dots, n$ , rahuldavad rekursiivset seost

$$B_i^{n+1}(t) = tB_{i-1}^n(t) + (1-t)B_i^n(t), \quad (1)$$

kus  $B_{-1}^n(t) = B_{n+1}^n(t) = 0$  ning  $B_0^0(t) = 1$ .

*Tõestus.* Olgu  $0 < i < n+1$ . Võrduse (1) paremat poolt teisendades saame

$$\begin{aligned} tB_{i-1}^n(t) + (1-t)B_i^n(t) &= t \binom{n}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{n-i+1} + (1-t) \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \\ &= \left[ \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right] t^i (1-t)^{n-i+1}. \end{aligned}$$

Lisaks

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} + \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n!(i+n-i+1)}{i!(n-i+1)!} = \binom{n+1}{i},$$

seega (1) kehtib.

Kui  $i = 0$ , siis  $B_0^{n+1}(t) = (1-t)^{n+1} = (1-t)B_0^n$ . Kui  $i = n+1$ , siis  $B_{n+1}^{n+1}(t) = t^{n+1} = tB_n^n(t)$ . □

Omaduse 6 põhjal saab Bernsteini baaspolünoomide väärtusi arvutada järgmise kolmnurkse skeemi kohaselt, kus iga tulp arvutatakse eelneva tulba põhjal

$$\begin{array}{cccccc} 1 = & B_0^0 & B_0^1 & B_0^2 & \dots & B_0^n & & B_{i-1}^n(t) \\ & & B_1^1 & B_1^2 & \dots & B_1^n & & \searrow \text{'} \\ & & & B_2^2 & \dots & B_2^n & & B_i^n(t) \xrightarrow{(1-t)} B_i^{n+1}(t) \\ & & & & \ddots & \dots & & \\ & & & & & B_n^n & & \end{array}$$



Viimatinimetatud omadus on aluseks de Casteljaui algoritmile, mida kirjeldame punktis 1.3.

## 1.2 Polünoomi esitus Bezier' kujul

Olgu antud  $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^d$ . Funktsiooni  $\mathbf{p} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i t^i \quad (2)$$

nimetame parameetriliseks polünoomiks. Kuna  $n + 1$  lineaarselt sõltumatut Bernsteini baaspolünoomi  $B_i^n(t)$  moodustavad baasi  $n$ -astme polünoomide ruumis, saab polünoomi (2) esitada üheselt Bezier' kujul

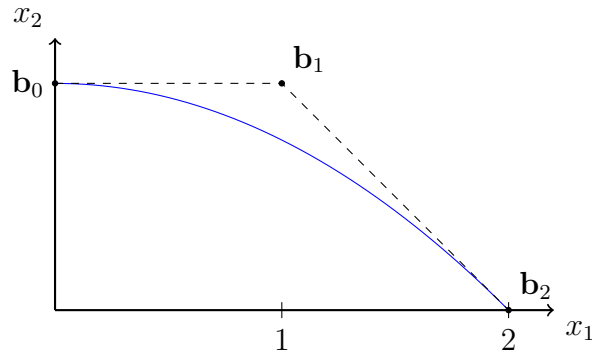
$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t), \quad (3)$$

kus  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^d$ .

**Näide 1.1.** Olgu  $d = 2$  ja  $n = 2$ . Defineerime  $\mathbf{b}_0 = (0, 1)$ ,  $\mathbf{b}_1 = (1, 1)$  ja  $\mathbf{b}_2 = (2, 0)$ . Siis polünoom (3) on kujul

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (0 \cdot (1-t)^2 + 1 \cdot 2t(1-t) + 2 \cdot t^2, 1 \cdot (1-t)^2 + 1 \cdot 2t(1-t) + 0 \cdot t^2) \\ &= (2t, 1-t^2). \end{aligned}$$

Esituse (2) kordajad saab siit välja kirjutada kui  $\mathbf{a}_0 = (0, 1)$ ,  $\mathbf{a}_1 = (2, 0)$  ja  $\mathbf{a}_2 = (0, -1)$ . Polünoom  $\mathbf{p}(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , ja punktid  $\mathbf{b}_i$  on kujutatud joonisel 2.



Joonis 2: Ruutpolünoom Bezier' kujul koos Bezier' punktide ja juhtpolügoniga.

Näites 1.1 toodud parameetrilise polünoomi saab esitada ka mitteparameetrilisel kujul tehes muutujavahetuse  $2t = x$ . Siis  $p(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$  kujutab sama polünoomi.

Esituselt (2) esitusele (3) üle minnes või vastupidi, saab kordajate teisendamisel kasutada valemeid (vt [6] lk 20–22)

$$\mathbf{b}_i = \sum_{k=0}^i \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} \mathbf{a}_k, \quad i = 0, \dots, n,$$

$$\mathbf{a}_i = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{n}{i} \binom{i}{k} \mathbf{b}_k, \quad i = 0, \dots, n.$$

**Definitsioon 2.** Bezier' kõverateks nimetatakse parameetrilisi polünoome  $\mathbf{p} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  kujul

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t), \quad t = \frac{u-a}{b-a}, \quad u \in [a, b],$$

Punkte  $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^d$  nimetatakse Bezier' punktideks ning murdjoont  $\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n$  Bezier' juhtpolügoniks (vt joonis 3). On selge, et  $u \in [a, b]$  korral  $t \in [0, 1]$ , lisaks saame esitada  $u = u(t) = a(1-t) + bt$ . Parameetreid  $t$  ja  $u$  nimetatakse vastavalt lokaalseks ja globaalseks polünoomi  $\mathbf{p}$  parameetriks.

Eelmises peatükis tõestatud Bernsteini polünoomide omaduste abil saab tõestada järgmised Bezier' kõverate omadused.

**Omadus 7.** Kõvera algus- ja lõpp-punktis  $\mathbf{p}(a) = \mathbf{b}_0$  ja  $\mathbf{p}(b) = \mathbf{b}_n$ .

*Tõestus.* Omaduse 4 põhjal  $\mathbf{p}(a) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(0) = \mathbf{b}_0$  ning  $\mathbf{p}(b) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(1) = \mathbf{b}_n$ . □

**Definitsioon 3.** Elementide  $x_1, \dots, x_n$  afiinseks kombinatsiooniks nimetatakse nende lineaarkombinatsiooni  $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ , kus  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ .

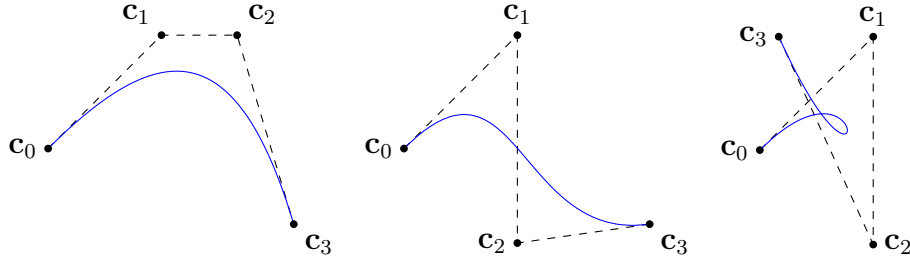
**Omadus 8.** Iga punkt polünoomil  $\mathbf{p}(u)$  on selle polünoomi Bezier' punktide afinne kombinatsioon.

*Tõestus.* Tuleneb vahetult omadusest 5. □

**Definitsioon 4.** Elementide  $x_1, \dots, x_n$  kumeraks kombinatsiooniks nimetatakse nende lineaarkombinatsiooni  $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ , kus  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  ning  $\alpha_i \geq 0$ .

**Omadus 9.** Iga punkt polünoomil  $\mathbf{p}(u)$  on selle polünoomi Bezier' punktide kumer kombinatsioon. Seega iga polünoom asub oma Bezier' punktide kumeras kattes.

*Tõestus.* Omaduste 3 ja 4 põhjal  $B_i^n(t) \geq 0, t \in [0, 1]$ . Jääb veel rakendada omadust 5.  $\square$



Joonis 3: Erinevad kuuppolünoomid Bezier' kujul.

### 1.3 De Casteljau algoritm

Üks võimalus polünoomi

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t), \quad t = \frac{u-a}{b-a}, \quad u \in [a, b],$$

väärtuse arvutamiseks mingis punktis on leida Bernsteini polünoomide  $B_i^n$  väärtused ning nende abil  $\mathbf{p}$  väärtus. Vahetum meetod on aga de Casteljau algoritm.

**De Casteljau algoritm.** Defineerime esmalt  $\mathbf{b}_i^0 = \mathbf{b}_i$  ning seejärel iga  $r = 1, \dots, n$  korral

$$\mathbf{b}_i^r = (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1} + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-r. \quad (4)$$

Viimane selle seose abil leitud punkt on  $\mathbf{b}_0^n = \mathbf{p}(u)$ .

Väite tõestamiseks lähtume kõverast

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i^0 B_i^n(t)$$

ning näitame, et iga  $r = 1, \dots, n$  korral kehtib

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^{n-r} \mathbf{b}_i^r B_i^{n-r}(t), \quad (5)$$

kus  $\mathbf{b}_i^r$  on leitud seose (4) abil.

Tõepoolest, võrdus (5) kehtib  $r = 0$  korral. Omaduse 6 ja seose (4) põhjal

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-r} \mathbf{b}_i^r B_i^{n-r}(t) &= \sum_{i=0}^{n-r} \mathbf{b}_i^r (t B_{i-1}^{n-r-1}(t) + (1-t) B_i^{n-r-1}(t)) \\ &= \sum_{i=-1}^{n-r-1} t \mathbf{b}_{i+1}^r B_i^{n-r-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-r} (1-t) \mathbf{b}_i^r B_i^{n-r-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-r-1} ((1-t) \mathbf{b}_i^r + t \mathbf{b}_{i+1}^r) B_i^{n-r-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-r-1} \mathbf{b}_i^{r+1} B_i^{n-r-1}(t). \end{aligned}$$

Sellega oleme näidanud, et

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i^0 B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{b}_i^1 B_i^{n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-2} \mathbf{b}_i^2 B_i^{n-2}(t) = \cdots = \sum_{i=0}^0 \mathbf{b}_i^n B_i^0(t) = \mathbf{b}_0^n.$$

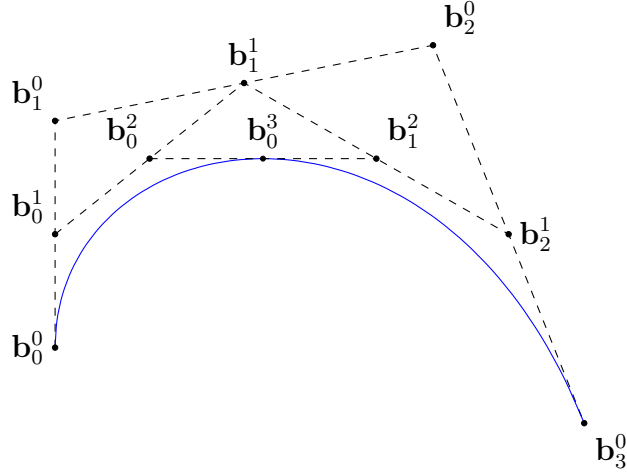
De Casteljau algoritm leiab  $\mathbf{p}(u) = \mathbf{b}_0^n$  väärtuse kasutades rekursiivset seost (4). Selle käigus tekivad vahepealsed punktid  $\mathbf{b}_i^r$ , mille saame paigutada kolmnurksesse tabelisse, kus iga element on eelnevas tulbas paikneva kahe elemendi kumer kombinatsioon:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{b}_0^0 & & & & & & \mathbf{b}_i^{r-1} \\ & \mathbf{b}_1^0 & \mathbf{b}_0^1 & & & & \searrow^{(1-t)} \\ & \mathbf{b}_2^0 & \mathbf{b}_1^1 & \mathbf{b}_0^2 & & & \mathbf{b}_{i+1}^{r-1} \xrightarrow{\cdot t} \mathbf{b}_i^r \\ & \vdots & & & \ddots & & \\ & \mathbf{b}_n^0 & \mathbf{b}_{n-1}^1 & \mathbf{b}_{n-2}^2 & \cdots & \mathbf{b}_0^n & \end{array}$$

**Näide 1.2.** Vaatleme numbrilise näitena juhtu  $n = 3$ ,  $d = 2$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $t = u = \frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0^0 &= (0, 1) \\ \mathbf{b}_1^0 &= (0, 4) \quad \mathbf{b}_0^1 = (0, 2.5) \\ \mathbf{b}_2^0 &= (5, 5) \quad \mathbf{b}_1^1 = (2.5, 4.5) \quad \mathbf{b}_0^2 = (1.25, 3.5) \\ \mathbf{b}_3^0 &= (7, 0) \quad \mathbf{b}_2^1 = (6, 2.5) \quad \mathbf{b}_1^2 = (4.25, 3.5) \quad \mathbf{b}_0^3 = (2.75, 3.5) \end{aligned}$$

Joonisel 4 on kujutatud algoritmis tekkinud punktid ja vastav Bezier' kõver.



Joonis 4: Kuup-Bezier' kõver  $\mathbf{p}(u)$  ning de Casteljau algoritmi abil arvutatud  $\mathbf{p}\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{b}_0^3$ .

## 1.4 Bezier' kõvera diferentseerimine

Bezier' kõvera

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t), \quad t = \frac{u-a}{b-a}, \quad u \in [a, b],$$

tuletiste arvutamiseks leiame esmalt Bernsteini baaspoliinoomide

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n,$$

tuletised. Iga  $i = 1, \dots, n-1$  korral

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_i^n(t) &= \frac{d}{dt} \left[ \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \right] = \\ &= \binom{n}{i} i t^{i-1} (1-t)^{n-i} + \binom{n}{i} (n-i) t^i (1-t)^{n-i-1} (-1) = \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-1-i)!} t^i (1-t)^{n-1-i} = \\ &= n \left[ \binom{n-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-1-i} \right] = \\ &= n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)). \end{aligned}$$

Lisaks

$$\frac{d}{dt} B_0^n(t) = \frac{d}{dt} \left[ \binom{n}{0} (1-t)^n \right] = -n(1-t)^{n-1} = -n B_0^{n-1}(t)$$

ning

$$\frac{d}{dt}B_n^n(t) = \frac{d}{dt}\left[\binom{n}{n}t^n\right] = nt^{n-1} = nB_{n-1}^{n-1}(t).$$

Arvestades, et  $B_{-1}^{n-1}(t) = B_n^{n-1}(t) = 0$ , saame

$$\frac{d}{dt}B_i^n(t) = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)), \quad i = 0, \dots, n. \quad (6)$$

Kasutades seost (6) diferentseerime nüüd Bezier' kõverat muutuja  $u$  järgi

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}\mathbf{b}(u) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \frac{d}{dt}B_i^n(t) \cdot \frac{dt}{du} = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \cdot \frac{1}{b-a} = \\ &= \frac{n}{b-a} (\mathbf{b}_0 B_{-1}^{n-1}(t) - \mathbf{b}_0 B_0^{n-1}(t) + \mathbf{b}_1 B_0^{n-1}(t) - \mathbf{b}_1 B_1^{n-1}(t) + \dots + \\ &+ \mathbf{b}_{n-1} B_{n-2}^{n-1}(t) - \mathbf{b}_{n-1} B_{n-1}^{n-1}(t) + \mathbf{b}_n B_{n-1}^{n-1}(t) - \mathbf{b}_n B_n^{n-1}(t)) = \\ &= \frac{n}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \mathbf{b}_i B_i^{n-1}(t), \end{aligned}$$

kus  $\Delta \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i$  ning arvestasime, et  $B_{-1}^{n-1}(t) = B_n^{n-1}(t) = 0$ .

Tuletised parameetri piirkonna otspunktides  $u = a$  ja  $u = b$  avalduvad järgmiselt:

$$\frac{d}{du}\mathbf{b}(a) = \frac{n}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \mathbf{b}_i B_i^{n-1}(0) = \frac{n}{b-a} \Delta \mathbf{b}_0 = \frac{n}{b-a} (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0), \quad (7)$$

$$\frac{d}{du}\mathbf{b}(b) = \frac{n}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \mathbf{b}_i B_i^{n-1}(1) = \frac{n}{b-a} \Delta \mathbf{b}_{n-1} = \frac{n}{b-a} (\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}). \quad (8)$$

Kasutasime siin omadust 4. Geomeetriliselt tähendavad omadused (7) ja (8), et Bezier' kõvera  $\mathbf{b}$  puutuja punktis  $u = a$  on samasihiline vektoriga  $\Delta \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0$  ning puutuja punktis  $u = b$  on samasihiline vektoriga  $\Delta \mathbf{b}_{n-1} = \mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}$ .

Leiame nüüd teist järku tuletise. Selleks piisab märgata, et  $\sum_{i=0}^{n-1} \Delta \mathbf{b}_i B_i^{n-1}(t)$  on  $n-1$ -astme Bezier' kõver kontrollpunktidega  $\Delta \mathbf{b}_i$ , seega

$$\frac{d^2}{du^2}\mathbf{b}(u) = \frac{n}{b-a} \cdot \frac{n-1}{b-a} \sum_{i=0}^{n-2} \Delta(\Delta \mathbf{b}_i) B_i^{n-2}(t)$$

ning üldiselt

$$\frac{d^r}{du^r}\mathbf{b}(u) = \frac{n!}{(n-r)!(b-a)^r} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r \mathbf{b}_i B_i^{n-r}(t),$$

kus  $\Delta^r \mathbf{b}_i = \Delta^{r-1} \mathbf{b}_{i+1} - \Delta^{r-1} \mathbf{b}_i$ .

Omaduse 4 põhjal parameetri piirkonna otspunktides  $u = a$  ja  $u = b$

$$\frac{d^r}{du^r} \mathbf{b}(a) = \frac{n!}{(n-r)!(b-a)^r} \Delta^r \mathbf{b}_0, \quad \frac{d^r}{du^r} \mathbf{b}(b) = \frac{n!}{(n-r)!(b-a)^r} \Delta^r \mathbf{b}_{n-r}. \quad (9)$$

Kuna  $\Delta^r \mathbf{b}_0$  sisaldab liidetavatena punkte  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_r$  ning  $\Delta^r \mathbf{b}_{n-r}$  punkte  $\mathbf{b}_{n-r}, \dots, \mathbf{b}_n$ , siis oleme tõestanud järgmise lause.

**Lause 1.1.** *Polünoomi  $\mathbf{b}(u)$   $r$ -järku tuletis punktis  $u = a$  sõltub  $r + 1$  esimesest Bezier' punktist,  $r$ -järku tuletis punktis  $u = b$  sõltub  $r + 1$  viimasest Bezier' punktist.*

## 2 Bezier' kõverate ühendamine

Antud peatükis uurime Bezier' kõverate ühendamist. Ühendamise eesmärk on leida liitkõver, mis oleks piisav arv kordi pidevalt diferentseeruv. Autori käsutuses olnud allikates Bezier' kõverate ühendamist sellisel kujul ei käsitletud, vaadeldi teisi klassikalisi polünoomi esitusi ja B-splaine, mistõttu võib antud peatükki nimetada autori omaloominguks. B-splainide teooria on klassikalisem ja täielikum ning erinevus meie lähenemisest seisneb vaid selles, millise baasi kaudu vaadeldavad tükiti polünoomid on esitatud. Bezier' liitkõverad koosnevad Bezier' kõveratest, mis on esitatud Bernsteinini baaspolünoomide kaudu.

### 2.1 Sisevõrrandid

Vaatleme Bezier' kõveraid  $\mathbf{p} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  ja  $\mathbf{q} : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(u) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t), \quad t = \frac{u-a}{b-a}, \quad u \in [a, b], \\ \mathbf{q}(u) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{d}_i B_i^n(t), \quad t = \frac{u-b}{c-b}, \quad u \in [b, c],\end{aligned}$$

kus  $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Defineerime (liit)kõvera

$$\mathbf{s}(u) = \begin{cases} \mathbf{p}(u), & a \leq u \leq b, \\ \mathbf{q}(u), & b \leq u \leq c. \end{cases} \quad (10)$$

Kõver  $\mathbf{s}$  on pidev ( $\mathbf{s} \in C^0$ ), kui ta on pidev punktis  $u = b$ , st  $\mathbf{p}(b) = \mathbf{q}(b)$ , mis omaduse 7 põhjal on samaväärne tingimusega

$$\mathbf{b}_n = \mathbf{d}_0. \quad (11)$$

Kõver  $\mathbf{s}$  on pidevalt diferentseeruv ( $\mathbf{s} \in C^1$ ), kui  $\mathbf{p}'(b) = \mathbf{q}'(b)$ , st lisaks võrdusele (11) kehtib omaduste 7 ja 8 põhjal veel

$$\frac{\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}}{b-a} = \frac{\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_0}{c-b}. \quad (12)$$

Võrdused (11) ja (12) määravad punktid  $\mathbf{d}_0$  ja  $\mathbf{d}_1$  üheselt, kui  $\mathbf{b}_{n-1}$  ja  $\mathbf{b}_n$  on fikseeritud ning kehtib

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{b}_n, \quad \mathbf{d}_1 = (1 - \mu)\mathbf{b}_{n-1} + \mu\mathbf{b}_n, \quad \mu = \frac{c-a}{b-a} > 1.$$



Üldiselt on kõver  $\mathbf{s}$   $r$  korda pidevalt diferentseeruv ( $\mathbf{s} \in C^r$ ), kui  $\frac{d^k}{du^k} \mathbf{p}(b) = \frac{d^k}{du^k} \mathbf{q}(b)$ ,  $k = 0, 1, \dots, r$ , ehk (9) põhjal

$$\frac{\Delta^k \mathbf{b}_{n-k}}{(b-a)^k} = \frac{\Delta^k \mathbf{d}_0}{(c-b)^k}, \quad k = 0, 1, \dots, r. \quad (13)$$

Näiteks  $r = 2$  korral on võrdused (13) kujul

$$\mathbf{b}_n = \mathbf{d}_0, \quad \frac{\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}}{b-a} = \frac{\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_0}{c-b}, \quad \frac{\mathbf{b}_n - 2\mathbf{b}_{n-1} + \mathbf{b}_{n-2}}{(b-a)^2} = \frac{\mathbf{d}_2 - 2\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_0}{(c-b)^2}$$

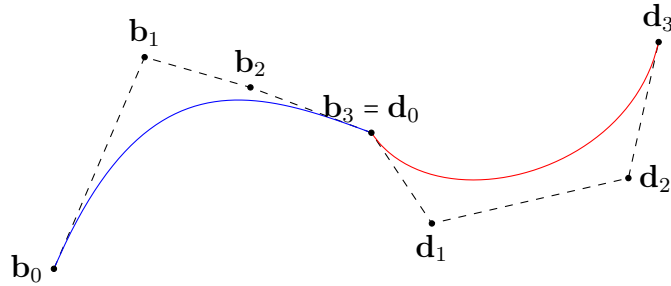
ning lisaks punktidele  $\mathbf{d}_0$  ja  $\mathbf{d}_1$  on üheselt määratud ka punkt  $\mathbf{d}_2$ , kui  $\mathbf{b}_{n-2}$ ,  $\mathbf{b}_{n-1}$  ja  $\mathbf{b}_n$  on fikseeritud. Seejuures

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_2 &= \left( \frac{c-b}{b-a} \right)^2 (\mathbf{b}_n - 2\mathbf{b}_{n-1} + \mathbf{b}_{n-2}) + 2\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_0 \\ &= (1-\mu)^2 (\mathbf{b}_n - 2\mathbf{b}_{n-1} + \mathbf{b}_{n-2}) + 2((1-\mu)\mathbf{b}_{n-1} + \mu\mathbf{b}_n) - \mathbf{b}_n \\ &= (1-\mu)^2 \mathbf{b}_{n-2} + 2(1-\mu)\mu \mathbf{b}_{n-1} + \mu^2 \mathbf{b}_n. \end{aligned}$$

Toome siinkohal kaks näidet tingimuse (13) rakendamise kohta. Esimene neist selgitab tingimuse (13) geomeetrilist tähendust, teine parametrizeeringu mõju liitkõvera diferentseeruvusele.

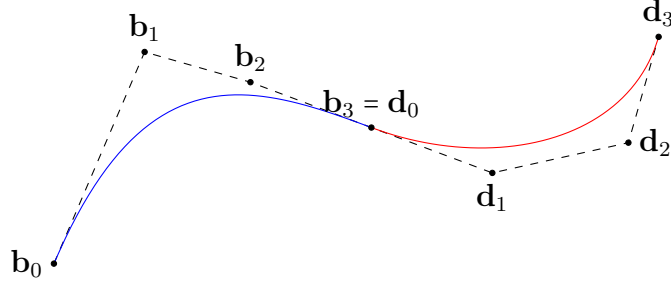
**Näide 2.1.** Olgu antud kontrollpunktid  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in \mathbb{R}^2$  ning nende poolt määratud kuup Bezier' kõver  $\mathbf{p}(u)$ ,  $u \in [a, b]$ . Konstrueerime kuupkõvera  $\mathbf{q}(u)$ ,  $u \in [b, c]$ , kontrollpunktidega  $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3 \in \mathbb{R}^2$  nii, et liitkõveral (10) oleks teatavad pidevuse omadused. Kasutame siin lisaeldust, et parametrizeering on ühtlane, st  $b-a = c-b$ .

Bezier' liitkõver (10) on pidev, kui kehtib võrdus  $\mathbf{b}_3 = \mathbf{d}_0$  (vt joonis 5). Punktid  $\mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}_2$  ja  $\mathbf{d}_3$  saab valida vabalt.



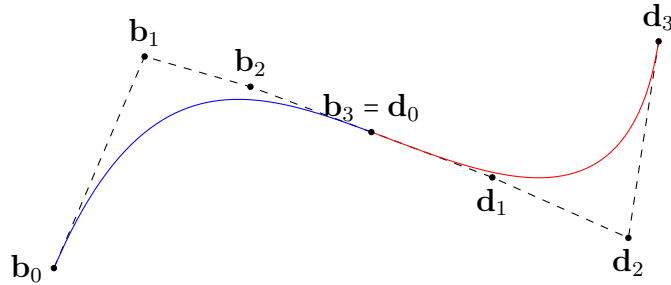
Joonis 5: Pidev Bezier' liitkõver.

Bezier' liitkõver (10) on pidevalt diferentseeruv, kui  $\mathbf{b}_3 = \mathbf{d}_0$  ja  $\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2 = \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_0$ , mida ilmestab joonis 6, kus punktid  $\mathbf{b}_2$ ,  $\mathbf{b}_3$  ja  $\mathbf{d}_1$  paiknevad ühel sirgel ning (võrdse parametrisseeringu korral) punktide  $\mathbf{b}_2$  ja  $\mathbf{b}_3$  ning  $\mathbf{b}_3$  ja  $\mathbf{d}_1$  vaheline kaugus on võrdne. Punktide  $\mathbf{d}_2$  ja  $\mathbf{d}_3$  asukohad on võimalik valida vabalt.



Joonis 6: Pidevalt diferentseeruv Bezier' liitkõver.

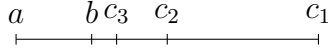
Bezier' liitkõver (10) on kaks korda pidevalt diferentseeruv, kui lisaks võrdustele  $\mathbf{b}_3 = \mathbf{d}_0$  ja  $\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2 = \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_0$  kehtib ka  $\mathbf{b}_3 - 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1 = \mathbf{d}_2 - 2\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_0$ . Paneme tähele, et punkt  $\mathbf{d}_3$  ei ole nende võrdustega määratud ning valime selle väärtuse vabalt. Joonisel 7 on kujutatud kaks korda pidevalt diferentseeruv liitkõver.



Joonis 7: Kaks korda pidevalt diferentseeruv Bezier' liitkõver.

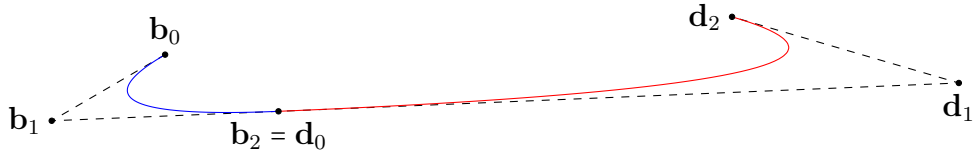
**Näide 2.2.** Olgu antud kontrollpunktid  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^2$  ning nende poolt määratud ruut Bezier' kõver  $\mathbf{p}(u)$ ,  $u \in [a, b]$ . Konstrueerime ruutkõvera  $\mathbf{q}(u)$ ,  $u \in [b, c]$ , kontrollpunktidega  $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \in \mathbb{R}^2$  nii, et liitkõver (10) oleks pidevalt diferentseeruv.

Uurime kolme erinevat parametrisseeringut, kus valime parameetri  $c = c_i > b$  järgmiselt:  $c_1 = b + 3(b - a)$ ,  $c_2 = b + (b - a)$ ,  $c_3 = b + \frac{1}{3}(b - a)$ . Parameetrite  $a, b, c$  paiknemine on näidatud joonisel 8.

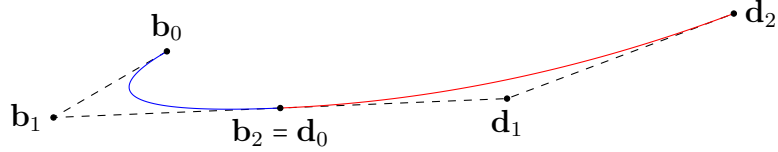


Joonis 8: Parameetrite  $a, b, c$  paiknemine.

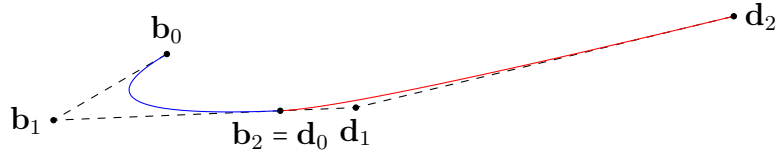
Tingimuse (13) põhjal  $\mathbf{b}_2 = \mathbf{d}_0$  ja  $\frac{\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1}{b - a} = \frac{\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_0}{c - b}$ . Need seosed määravad ära punktide  $\mathbf{d}_0$  ja  $\mathbf{d}_1$  asukoha, punkti  $\mathbf{d}_2$  valime vabalt, aga nii, et ta on kõigi parametriseringute korral sama (vt joonised 9-11). Punktid  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 = \mathbf{d}_0$  ja  $\mathbf{d}_1$  asuvad samal sirgel, kusjuures punkt  $\mathbf{b}_2$  jagab lõigu  $\mathbf{b}_1\mathbf{d}_1$  kaheks osaks, mis suhtuvad nagu lõikude  $[a, b]$  ja  $[b, c]$  pikkused.



Joonis 9: Diferentseeruv ruutkõver juhul  $c = c_1$ .



Joonis 10: Diferentseeruv ruutkõver juhul  $c = c_2$ .



Joonis 11: Diferentseeruv ruutkõver juhul  $c = c_3$ .

Parameetriliste liitkõverate korral parametriseringu muutmine ei muuda kõvera kuju, sest see on üheselt määratud kontrollpunktide poolt, kuid muutuvad diferentseeruvuse omadused.

## 2.2 Perioodiline interpoleerimine Bezier' kõverate abil

Olgu antud punktid  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^d$ , kusjuures  $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_0$ , ning neile punktidele vastavad parameetri väärtused  $u_0 < \dots < u_m$ . Eesmärk on leida kinnine Bezier' liitkõver ehk perioodiline spline, mis läbib neid etteantud punkte ning oleks maksimaalselt sile. Seega vaja on leida  $\mathbf{s}(u)$ ,  $u \in [u_0, u_m]$ , nii, et

- 1) igal osalõigul  $u \in [u_{j-1}, u_j]$  oleks tegemist  $n$ -astme Bezier kõveraga

$$\mathbf{s}|_{[u_{j-1}, u_j]} = \mathbf{p}^j(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i^j B_i^n(t), \quad t = \frac{u - u_{j-1}}{u_j - u_{j-1}}, u \in [u_{j-1}, u_j], j = 1, \dots, m;$$

- 2) liitkõver  $\mathbf{s}$  interpoleeriks etteantud väärtusi

$$\mathbf{s}(u_j) = \mathbf{x}_j, \quad j = 0, \dots, m;$$

- 3)  $\mathbf{s} \in C^{m-1}$  (perioodilisuse tõttu ka  $\frac{d^r}{du^r} \mathbf{s}(u_0+) = \frac{d^r}{du^r} \mathbf{s}(u_m-)$ ,  $r = 1, \dots, n-1$ ).

Vaatleme esmalt kuupkõveratega interpoleerimist, st juhtu  $n = 3$ . Bezier' kõvera  $\mathbf{p}^j$  määramiseks peame määrama kontrollpunktid  $\mathbf{b}_0^j, \mathbf{b}_1^j, \mathbf{b}_2^j, \mathbf{b}_3^j$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Tingimuse (11) ning interpolatsioonitingimuste põhjal

$$\mathbf{b}_3^j = \mathbf{b}_0^{j+1} = \mathbf{x}_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (14)$$

siin ja edaspidi kõikjal perioodilisuse tõttu  $\mathbf{b}_i^{m+1} = \mathbf{b}_i^1$ , lisaks  $u_{m+1} = u_m + (u_1 - u_0)$ . Kuna kõver peab olema kaks korda pidevalt diferentseeruv ( $r = 2$ ), siis tingimuse (13) põhjal

$$\frac{\mathbf{b}_3^j - \mathbf{b}_2^j}{u_j - u_{j-1}} = \frac{\mathbf{b}_1^{j+1} - \mathbf{b}_0^{j+1}}{u_{j+1} - u_j}, \quad j = 1, \dots, m; \quad (15)$$

$$\frac{\mathbf{b}_3^j - 2\mathbf{b}_2^j + \mathbf{b}_1^j}{(u_j - u_{j-1})^2} = \frac{\mathbf{b}_2^{j+1} - 2\mathbf{b}_1^{j+1} + \mathbf{b}_0^{j+1}}{(u_{j+1} - u_j)^2}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (16)$$

Oleme saanud seostest (14)–(16)  $4m$  võrrandist koosneva süsteemi  $4m$  kontrollpunkti määramiseks. Tegelikult, kuna kontrollpunktid on  $d$ -mõõtmelised, siis lahendatakse  $d$  võrrandisüsteemi, iga koordinaadi kohta eraldi.

Kasutame tähist  $\mu_j := \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{u_j - u_{j-1}}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , ning esitame süsteemi pisut teisel kujul. Asendame  $\mathbf{b}_3^j = \mathbf{b}_0^{j+1} = \mathbf{x}_j$  võrranditesse (15) ja (16), saame

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{b}_2^j}{u_j - u_{j-1}} &= \frac{\mathbf{b}_1^{j+1} - \mathbf{x}_j}{u_{j+1} - u_j} \Leftrightarrow \frac{u_{j+1} - u_j}{u_j - u_{j-1}} (\mathbf{x}_j - \mathbf{b}_2^j) = \mathbf{b}_1^{j+1} - \mathbf{x}_j \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathbf{b}_1^{j+1} + \frac{u_{j+1} - u_j}{u_j - u_{j-1}} \mathbf{b}_2^j = \left( \frac{u_{j+1} - u_j}{u_j - u_{j-1}} + 1 \right) \mathbf{x}_j \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathbf{b}_1^{j+1} + (\mu_j - 1) \mathbf{b}_2^j = \mu_j \mathbf{x}_j \end{aligned}$$

ning

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{x}_j - 2\mathbf{b}_2^j + \mathbf{b}_1^j}{(u_j - u_{j-1})^2} &= \frac{\mathbf{b}_2^{j+1} - 2\mathbf{b}_1^{j+1} + \mathbf{x}_j}{(u_{j+1} - u_j)^2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \left( \frac{u_{j+1} - u_j}{u_j - u_{j-1}} \right)^2 (\mathbf{x}_j - 2\mathbf{b}_2^j + \mathbf{b}_1^j) &= \mathbf{b}_2^{j+1} - 2\mathbf{b}_1^{j+1} + \mathbf{x}_j \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \mathbf{b}_2^{j+1} - 2\mathbf{b}_1^{j+1} + \left( \frac{u_{j+1} - u_j}{u_j - u_{j-1}} \right)^2 (2\mathbf{b}_2^j - \mathbf{b}_1^j) &= \left( \left( \frac{u_{j+1} - u_j}{u_j - u_{j-1}} \right)^2 - 1 \right) \mathbf{x}_j \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \mathbf{b}_2^{j+1} - 2\mathbf{b}_1^{j+1} + (1 - \mu_j)^2 (2\mathbf{b}_2^j - \mathbf{b}_1^j) &= ((1 - \mu_j)^2 - 1) \mathbf{x}_j \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \mathbf{b}_2^{j+1} - 2\mathbf{b}_1^{j+1} + 2(1 - \mu_j)^2 \mathbf{b}_2^j - (1 - \mu_j)^2 \mathbf{b}_1^j &= \mu_j(\mu_j - 2) \mathbf{x}_j.
\end{aligned}$$

Kontrollpunktid  $\mathbf{b}_0^j = \mathbf{x}_{j-1}$ ,  $\mathbf{b}_3^j = \mathbf{x}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , saame määrata vahetult, kontrollpunktide  $\mathbf{b}_1^j, \mathbf{b}_2^j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , leidmiseks lahendame süsteemi

$$\begin{cases} (\mu_j - 1)\mathbf{b}_2^j + \mathbf{b}_1^{j+1} = \mu_j \mathbf{x}_j, & j = 1, \dots, m, \\ (1 - \mu_j)^2 \mathbf{b}_1^j - 2(1 - \mu_j)^2 \mathbf{b}_2^j + 2\mathbf{b}_1^{j+1} - \mathbf{b}_2^{j+1} = \mu_j(2 - \mu_j) \mathbf{x}_j, & j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (17)$$

Ühtlase parametriseringu  $u_i = u_0 + ih$ ,  $i = 1, \dots, m$ , korral  $\mu_j = \frac{2h}{h} = 2$  ning süsteem (17) esitub kujul

$$\begin{cases} \mathbf{b}_2^j + \mathbf{b}_1^{j+1} = 2\mathbf{x}_j, & j = 1, \dots, m, \\ \mathbf{b}_1^j - 2\mathbf{b}_2^j + 2\mathbf{b}_1^{j+1} - \mathbf{b}_2^{j+1} = 0, & j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Maatrikskujul on see

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^1 \\ \mathbf{b}_2^1 \\ \mathbf{b}_1^2 \\ \mathbf{b}_2^2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_1^m \\ \mathbf{b}_2^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{x}_1 \\ 0 \\ 2\mathbf{x}_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 2\mathbf{x}_m \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Üldkujul süsteem (17) on üheselt lahenduv, sest kuupsplainidega perioodiline interpoleerimise ülesanne on üheselt lahenduv (vt [8] lk 99). Ühtlase parametriseringu korral on võimalik süsteemimaatriksi  $A$  ridade ja veergude elementaarteisendustega viia kujule, kus peadiagonaal domineerib. Selleks liidame igale veerule

indeksiga  $2k$  juurde veeru indeksiga  $2k + 1$  (modulo  $2m$ ), saame

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Seejärel lahutame igast reast indeksiga  $2k$  0.5-kordse rea indeksiga  $2k - 3$  (modulo  $2m$ ), saame

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0.5 & 0 \end{vmatrix}$$

Kui siin liigutada esimene veerg viimaseks, on tegemist domineeriva peadiagonaaliga maatriksi determinandiga, seega  $\det A \neq 0$  ning ühtlase parametriseringu korral on näidatud ülesande ühene lahenduvus. (Domineeriva peadiagonaaliga maatriks on regulaarne, vastav tulemus on leitav näiteks [8] lk 333.)

Süsteemi lahendamisel leiame kontrollpunktid, mis defineerivad nii juhtpolügoni kui liitkõvera.

**Näide 2.3.** Olgu antud punktid  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_8 \in \mathbb{R}^2$ , defineerime  $\mathbf{x}_9 = \mathbf{x}_0$ . Kasutame ühtlast parametriseringut  $u_i = i$ ,  $i = 0, \dots, 9$ . Otsime kaks korda pidevalt diferentseeruvat kinnist kuup Bezier' liitkõverat, mis läbib antud punkte.

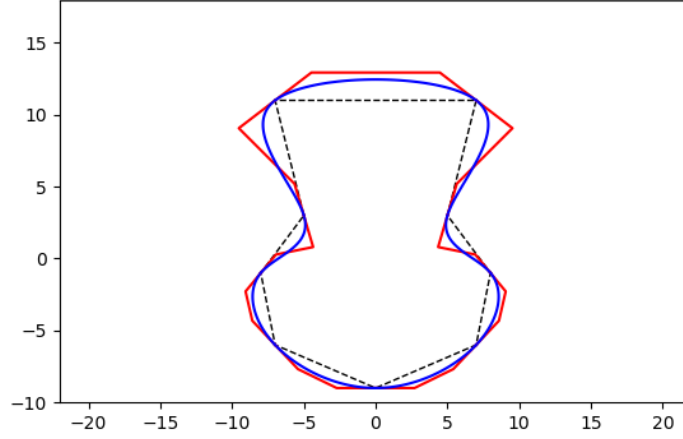
Joonisel 12 on antud punktid  $\mathbf{x}_j$ ,  $j = 0, \dots, 8$ , ühendatud musta katkendjoonega, juhtpolügon on kujutatud punase joonena ning Bezier' kuupkõver sinise joonena.

Uurime ühtlasi ruutkõverate ( $n = 2$ ) juhtu. Bezier' kõvera  $\mathbf{p}_j$  määramiseks tuleb leida punktid  $\mathbf{b}_0^j, \mathbf{b}_1^j, \mathbf{b}_2^j$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Tingimuse (11) ja interpolatsioonitingimuste põhjal

$$\mathbf{b}_2^j = \mathbf{b}_0^{j+1} = \mathbf{x}_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (18)$$

siin ja edaspidi kõikjal perioodilisuse tõttu  $\mathbf{b}_i^{m+1} = \mathbf{b}_i^1$ , lisaks  $u_{m+1} = u_m + (u_1 - u_0)$ . Kuna otsime pidevalt diferentseeruvat kõverat, siis tingimusest (13) tekivad võrrandid

$$\frac{\mathbf{b}_2^j - \mathbf{b}_1^j}{u_j - u_{j-1}} = \frac{\mathbf{b}_1^{j+1} - \mathbf{b}_0^{j+1}}{u_{j+1} - u_j}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (19)$$



Joonis 12: Kinnine kuup Bezier' liitkõver.

Seega seostest (18)–(19) saime  $3m$  võrrandist koosneva süsteemi, mis määrab  $3m$  kontrollpunkti. Jällegi lahendatakse  $d$  võrrandisüsteemi, iga koordinaadi kohta eraldi.

Kasutame tähist  $\mu_j := \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{u_j - u_{j-1}}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , ning esitame süsteemi pisut teisel kujul. Asendame  $\mathbf{b}_2^j = \mathbf{b}_0^{j+1} = \mathbf{x}_j$  võrranditesse (19) ja saame

$$\begin{aligned}
 \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{b}_1^j}{u_j - u_{j-1}} &= \frac{\mathbf{b}_1^{j+1} - \mathbf{x}_j}{u_{j+1} - u_j} \Leftrightarrow \frac{u_{j+1} - u_j}{u_j - u_{j-1}} (\mathbf{x}_j - \mathbf{b}_1^j) = \mathbf{b}_1^{j+1} - \mathbf{x}_j \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \mathbf{b}_1^{j+1} + \frac{u_{j+1} - u_j}{u_j - u_{j-1}} \mathbf{b}_1^j = \left( \frac{u_{j+1} - u_j}{u_j - u_{j-1}} + 1 \right) \mathbf{x}_j \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \mathbf{b}_1^{j+1} + (\mu_j - 1) \mathbf{b}_1^j = \mu_j \mathbf{x}_j.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Kontrollpunktid  $\mathbf{b}_0^j = \mathbf{x}_{j-1}$ ,  $\mathbf{b}_2^j = \mathbf{x}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , saame määrata vahetult, kontrollpunktide  $\mathbf{b}_1^j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , leidmiseks lahendame võrranditest (20) koosneva süsteemi.

Süsteemi (20) maatriksi  $A$  peadiagonaalil on elemendid  $\mu_j - 1$ , peadiagonaali kohal elemendid 1 ning viimase rea esimene element on samuti 1. Leiame selle maatriksi determinandi arendades esimese veeru järgi. Esimese veerus on kaks nullist erinevat elementi ning nende esimest järku miinorite algebralised täiendid on sellised determinandid, kus peadiagonaalil ühel pool on ainult nullid, seega esituvad

need algebralised täiendid peadiagonaali elementide korrutise kaudu. Seega

$$\begin{aligned}\det A &= (\mu_1 - 1) \cdot (-1)^2 (\mu_2 - 1) \dots (\mu_m - 1) + 1 \cdot (-1)^{m+1} \cdot 1 = \\ &= \frac{u_2 - u_1}{u_1 - u_0} \cdot \frac{u_3 - u_2}{u_2 - u_1} \dots \frac{u_{m+1} - u_m}{u_m - u_{m-1}} + (-1)^{m+1} = \\ &= \frac{u_{m+1} - u_m}{u_1 - u_0} + (-1)^{m+1} = 1 + (-1)^{m+1}\end{aligned}$$

ning paaritu  $m$  korral  $\det A \neq 0$  ning süsteem on üheselt lahenduv, paaris  $m$  korral  $\det A = 0$  ning süsteem kas ei ole lahenduv või on tal lõpmata palju lahendeid.

Ühtlase parametriseringu  $u_i = u_0 + ih$ ,  $i = 1, \dots, m$ , korral  $\mu_j = \frac{2h}{h} = 2$  ning võrrandid (20) esituvad kujul

$$\mathbf{b}_1^j + \mathbf{b}_1^{j+1} = 2\mathbf{x}_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Tekkiva süsteemi maatrikskuju on järgmine.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^1 \\ \mathbf{b}_1^2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_1^{m-1} \\ \mathbf{b}_1^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{x}_1 \\ 2\mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ 2\mathbf{x}_{m-1} \\ 2\mathbf{x}_m \end{pmatrix} \quad (21)$$

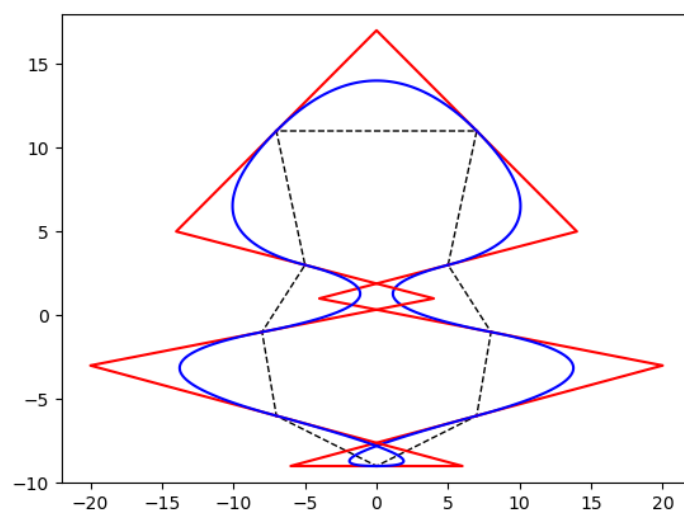
Süsteemi lahendamisel leiame kontrollpunktide, mis defineerivad juhtpolügoni ja liitkõvera.

**Näide 2.4.** Olgu antud punktid  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_8 \in \mathbb{R}^2$ , defineerime  $\mathbf{x}_9 = \mathbf{x}_0$ . Kasutame ühtlast parametriseringut  $u_i = i$ ,  $i = 0, \dots, 9$ . Otsime pidevalt diferentseeruvat kinnist ruut Bezier' liitkõverat, mis läbib antud punkte.

Joonisel 13 on antud punktid  $\mathbf{x}_j$ ,  $j = 0, \dots, 8$ , ühendatud musta katkendjoonega, juhtpolügon on kujutatud punase joonena ning Bezier' kuupkõver sinise joonena.

Praktikas kasutatakse rohkem kuupkõveratega interpoleerimist, sest süsteem on alati üheselt lahenduv ning kuupfunktsioonid on paindlikumad. Kui võrrelda näiteid 2.3 ja 2.4, siis on joonistelt 12 ja 13 näha, et kuupkõveratega interpoleerimine on andnud samade algandmete korral tulemuse, mis on lähedasem algandmete põhjal defineeritud murdjoonele. Ruutkõveratega interpoleerimisel kipuvad tihti tekkima ka silmused, nagu ka joonisel 13.





Joonis 13: Kinnine ruut Bezier' liitkõver.

### 3 Polaarkuju

Selles peatükis defineerime polünoomi polaarkuju, vaatleme selle omadusi ning seoseid Bezier' kõveratega. Peatükk põhineb allikatel [4, 6].

**Definitsioon 5.** Iga  $n$ -astme polünoomi  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ , korral eksisteerib  $n$ -muutuja polünoom  $P(x_1, \dots, x_n)$ , mis on

- 1) sümmeetriline, st  $P(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = P(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$ ;
- 2) multiafinne ehk iga muutuja suhtes afinne, st  $x_i = \lambda y + (1 - \lambda)z$  korral

$$P(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = \lambda P(x_1, \dots, y, \dots, x_n) + (1 - \lambda)P(x_1, \dots, z, \dots, x_n);$$

- 3) oma diagonaalil võrdne polünoomiga  $p$ , st  $P(x, \dots, x) = p(x)$ .

Polünoomi  $P$  nimetatakse polünoomi  $p$  **polaarkujuks** (ingl k *polar form* või *blossom*).

**Näide 3.1.** Ruutpolünoomi  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$  polaarkuju on

$$P(x_1, x_2) = a_0 + a_1 \frac{x_1 + x_2}{2} + a_2 x_1 x_2.$$

Näitame tingimuste 1)–3) täidetust. Sümmeetrilisus on ilmne, sest liitmine ja korrutamine on reaalarvude hulgas kommutatiivsed. Kontrollimaks, kas polünoom  $P$  on afinne iga muutuja suhtes, võtame  $x_1 = \lambda y + (1 - \lambda)z$ , siis

$$\begin{aligned} P(\lambda y + (1 - \lambda)z, x_2) &= a_0 + a_1 \frac{\lambda y + (1 - \lambda)z + x_2}{2} + a_2 (\lambda y + (1 - \lambda)z) x_2 = \\ &= \lambda a_0 + \lambda a_1 \frac{y + x_2}{2} + \lambda a_2 y x_2 \\ &\quad + (1 - \lambda) a_0 + (1 - \lambda) a_1 \frac{z + x_2}{2} + (1 - \lambda) a_2 z x_2 = \\ &= \lambda P(y, x_2) + (1 - \lambda) P(z, x_2) \end{aligned}$$

ning sümmeetrilisuse tõttu on  $P$  afinne ka teise muutuja suhtes. Ka kolmas tingimus kehtib, sest

$$P(x, x) = a_0 + a_1 \frac{x + x}{2} + a_2 x^2 = p(x).$$

Definitsiooni korrektsuse põhjendamiseks peame näitama, et iga polünoomi korral polaarkuju eksisteerib ning on üheselt määratud. Selleks tõestame kaks järgnevat lauset (vt [6], lk 26–27).

**Lause 3.1.** *Igal polünoomil eksisteerib polaarkuju.*

*Tõestus.* Vaatleme polünoomi  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  ning selle polünoomi kordajate  $a_i$  abil defineeritud  $n$ -muutuja polünoomi

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n a_i \left( \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_i \leq n} \frac{x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_i}}{\binom{n}{i}} \right). \quad (22)$$

Näitame, et  $P$  on polünoomi  $p$  polaarkuju. Selleks piisab veenduda, et polünoom  $P$  rahuldab polaarkuju definitsioonis toodud tingimusi 1)–3).

Fikseerime indeksid  $l$  ja  $m$ , üldisust kitsendamata eeldame, et  $l < m$ . Peame näitama, et  $P(\dots, x_l, \dots, x_m, \dots) = P(\dots, x_m, \dots, x_l, \dots)$ . Summa

$$\sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_i \leq n} \frac{x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_i}}{\binom{n}{i}}$$

iga liidetava korral kehtib üks järgmistest võimalustest:

- 1)  $l, m \in \{k_1, \dots, k_i\}$ ;
- 2)  $l \in \{k_1, \dots, k_i\}$ ,  $m \notin \{k_1, \dots, k_i\}$ ;
- 3)  $m \in \{k_1, \dots, k_i\}$ ,  $l \notin \{k_1, \dots, k_i\}$ ;
- 4)  $l, m \notin \{k_1, \dots, k_i\}$ .

Juhul 1) rakendub korrutamise kommutatiivsus, juhtudel 2) ja 3) leidub summas selline liidetav, kus kõik tegurid on võrreldes algsega samad, välja arvatud  $x_l$ , mis on asendatud teguriga  $x_m$  (või vastupidi). Siin rakendub liitmise kommutatiivsus. Juht 4) ei oma sümmeetrisuse seisukohast rolli. Seega  $P$  on sümmeetriiline.

Näitame, et  $P$  on afinne muutuja  $x_m$  suhtes. Olgu  $x_m = \lambda y + (1 - \lambda)z$ . Juhul  $m \notin \{k_1, \dots, k_i\}$  saame kirjutada

$$x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_i} = \lambda x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_i} + (1 - \lambda) x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_i}.$$

Juhul  $m \in \{k_1, \dots, k_i\}$  kehtib

$$x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_i} = \lambda x_{k_1} x_{k_2} \dots y \dots x_{k_i} + (1 - \lambda) x_{k_1} x_{k_2} \dots z \dots x_{k_i}.$$

Seega  $P$  on afinne iga muutuja suhtes.

Kolmanda omaduse tõestamiseks piisab märgata, et võrduse (22) sisemises summas on täpselt  $\binom{n}{i}$  liidetavat.

□

Järgnevas vaatame, kuidas on omavahel seotud Bezier' kõvera kontrollpunktid, de Casteljau algoritm ning vastava polünoomi polaarkuju. Olgu  $\mathbf{p}$  Bezier' kõver,

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t), \quad t = \frac{u-a}{b-a}, \quad u \in [a, b].$$

**Teoreem 3.2.** *Kui  $P$  on polünoomi  $\mathbf{p}$  polaarkuju, siis*

$$\mathbf{b}_i = P(\underbrace{a, \dots, a}_{n-i}, \underbrace{b, \dots, b}_i).$$

*Tõestus.* Olgu  $u = (1-t)a + tb$ ,  $t \in [0, 1]$ . Tähistame  $r \in \{0, 1, \dots, n\}$  ja  $i \in \{0, 1, \dots, n-r\}$  korral

$$\mathbf{b}_i^r = P(\underbrace{a, \dots, a}_{n-r-i}, \underbrace{b, \dots, b}_i, \underbrace{u, \dots, u}_r).$$

Kuna  $u = (1-t)a + tb$ , siis kasutades sümmeetrilisust ja multiafiinsust saame

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i^r &= (1-t)P(a, \dots, a, b, \dots, b, a, u, \dots, u) + tP(a, \dots, a, b, \dots, b, b, u, \dots, u) = \\ &= (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1} + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}. \end{aligned}$$

Seetõttu punktid  $\mathbf{b}_i^r$  rahuldavad de Casteljau algoritmi ehk rekursiivset seost (4). Lähtuvalt punktidest  $\mathbf{b}_i^0 = P(a, \dots, a, b, \dots, b)$  oleme leidnud de Casteljau algoritmi põhjal  $\mathbf{b}_0^n = P(u, \dots, u)$ , kusjuures polaarkuju definitsiooni kohaselt  $\mathbf{b}_0^n = \mathbf{p}(u)$ . Kuna  $u \in [a, b]$  on suvaline ning Bezier' esitus on ühene, siis  $\mathbf{b}_i^0 = \mathbf{b}_i$ .  $\square$

**Lemma 3.3.** *Polaarkuju on ühene.*

*Tõestus.* Olgu  $n$ -muutuja polünoomid  $P$  ja  $Q$  on polünoomi  $\mathbf{p}$  polaarkujud. Olgu  $u_1, \dots, u_n \in [a, b]$  suvalised. Iga  $r \in \{0, 1, \dots, n\}$  ja  $i \in \{0, 1, \dots, n-r\}$  korral defineerime

$$\mathbf{b}_i^r = P(\underbrace{a, \dots, a}_{n-r-i}, \underbrace{b, \dots, b}_i, u_1, \dots, u_r)$$

ja

$$\mathbf{c}_i^r = Q(\underbrace{a, \dots, a}_{n-r-i}, \underbrace{b, \dots, b}_i, u_1, \dots, u_r).$$

Kuna polaarkujud  $P$  ja  $Q$  on sümmeetrilised ning multiafiinsed, lisaks  $u_r = (1-t_r)a + t_rb$ , kus  $t_r = (u_r - a)/(b - a)$ , saame järgmised rekursiivsed seosed

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i^r &= (1-t_r)\mathbf{b}_i^{r-1} + t_r\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}, \\ \mathbf{c}_i^r &= (1-t_r)\mathbf{c}_i^{r-1} + t_r\mathbf{c}_{i+1}^{r-1}. \end{aligned}$$

Teoreemi 3.2 põhjal  $\mathbf{b}_i^0 = \mathbf{c}_i^0 = \mathbf{b}_i$  ning rakendades induktsiooni  $r$  järgi saame  $\mathbf{b}_i^r = \mathbf{c}_i^r$ . Seega  $\mathbf{b}_0^n = \mathbf{c}_0^n$  ehk  $P(u_1, \dots, u_n) = Q(u_1, \dots, u_n)$  iga argumentide komplekti  $u_1, \dots, u_n$  korral.  $\square$

Seega oleme näidanud, et igal  $n$ -astme polünoomil  $\mathbf{p}$  eksisteerib ühene polaarkuju  $P$  ning et polünoomi  $\mathbf{p}$  Bezier' kontrollpunktid on esitatavad polaarkuju kaudu kui  $\mathbf{b}_i = P(\underbrace{a, \dots, a}_{n-i}, \underbrace{b, \dots, b}_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

Lõpetuseks vaatleme veel Teoreemi 3.2 valguses de Casteljau algoritmi rakendamist. Selleks, et leida polünoomi  $\mathbf{p}$  väärtus punktis  $c \in (a, b)$ , leitakse rekursiivse seose (4) abil punktid

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{b}_0^0 & = & \mathbf{b}_0 & & & & \\ \mathbf{b}_1^0 & = & \mathbf{b}_1 & & \mathbf{b}_0^1 & & \\ \mathbf{b}_2^0 & = & \mathbf{b}_2 & & \mathbf{b}_1^1 & & \mathbf{b}_0^2 \\ & & \vdots & & & & \ddots \\ \mathbf{b}_n^0 & = & \mathbf{b}_n & & \mathbf{b}_{n-1}^1 & & \mathbf{b}_{n-2}^2 & \dots & \mathbf{b}_0^n = \mathbf{p}(c) \end{array}$$

Teoreemi 3.2 põhjal on ülemisel diagonaalil elemendid

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0^0 &= P(a, \dots, a), \\ \mathbf{b}_0^1 &= P(a, \dots, a, c), \\ \mathbf{b}_0^2 &= P(a, \dots, a, c, c), \\ &\dots \\ \mathbf{b}_0^n &= P(c, \dots, c) \end{aligned}$$

ning alumises reas elemendid

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_n^0 &= P(b, \dots, b), \\ \mathbf{b}_{n-1}^1 &= P(b, \dots, b, c), \\ \mathbf{b}_{n-2}^2 &= P(b, \dots, b, c, c), \\ &\dots \\ \mathbf{b}_0^n &= P(c, \dots, c). \end{aligned}$$

Sellela on tõestatud järgmine

**Järeldus 3.4.** *De Casteljaui algoritmi käigus leitakse polünoomi  $\mathbf{p}(u)$ ,  $u \in [a, b]$ , väärtus punktis  $c \in (a, b)$ . Sellega seoses jaotatakse polünoom  $\mathbf{p}(u)$ ,  $u \in [a, b]$  kaheks osaks:  $\mathbf{p}(u)$ ,  $u \in [a, c]$  ja  $\mathbf{p}(u)$ ,  $u \in [c, b]$ , kusjuures kummagi osa juhtpolügon on defineeritud de Casteljaui algoritmi poolt, vastavalt  $\mathbf{b}_0^0 \mathbf{b}_0^1 \mathbf{b}_0^2 \dots, \mathbf{b}_0^n$  ning  $\mathbf{b}_n^0 \mathbf{b}_{n-1}^1 \mathbf{b}_{n-2}^2 \dots, \mathbf{b}_0^n$ .*

## 4 Subdivision

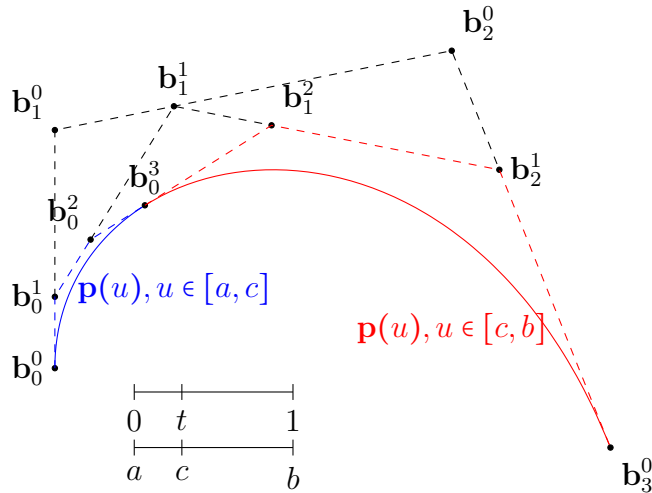
Viimases peatükis vaatleme *subdivision* algoritme kui võimalust defineerida parameetrilisi kõveraid. Eestikeelset vastet sellel terminil veel ei eksisteeri. Ühelt poolt tähendab *subdivision* osadeks jaotamist, teiselt poolt olemasolevate diskreetsete andmepunktide põhjal punktide järjestikust lisamist nii, et igal etapil saadud andmepunkte ühendavate juhtpolügonide jada (neid juhtpolügone võib nimetada ka murdjoonteks või linearsplainideks) koondub mingiks siledaks sobivate omadustega funktsiooniks. Seda viimast protsessi võib nimetada ka juhtpolügoni parendamiseks tippude lisamise teel. Vaatleme lähemalt nelja *subdivision* algoritmi. Peatükk põhineb allikatel [4, 6, 7], esitatud algoritmid pärinevad monograafiast [7].

### 4.1 Subdivision kui osadeks jaotamine

Vaatleme polünoomi

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i^0 B_i^n(t), \quad u \in [a, b], \quad t = \frac{u-a}{b-a},$$

ning leiame de Casteljaui algoritmi abil selle väärtuse punktis  $c \in (a, b)$ . De Casteljaui algoritmi rakendamise käigus tekivad punktid on juhul  $n = 3$  kujutatud joonisel 14. Järelduse 3.4 põhjal on murdjoonte  $\mathbf{b}_0^0 \mathbf{b}_1^1 \dots \mathbf{b}_n^n$  ja  $\mathbf{b}_0^n \mathbf{b}_1^{n-1} \dots \mathbf{b}_n^0$  näol tegemist vastavate osapolünoomide  $\mathbf{p}(u)$ ,  $u \in [a, c]$ , ja  $\mathbf{p}(u)$ ,  $u \in [c, b]$  juhtpolügonidega.



Joonis 14: Juhtpolügon  $\mathbf{b}_0^0 \mathbf{b}_1^0 \mathbf{b}_2^0 \mathbf{b}_3^0$ , vastav Bezier' kõver  $\mathbf{p}(u)$ ,  $u \in [a, b]$ , ja de Casteljaui algoritmi abil leitud punkt  $\mathbf{p}(c) = \mathbf{b}_0^3$ , mis jaotab algse kõvera kaheks osaks.

Sellist Bezier' kõvera osadeks jaotamist ja vastavate juhtpolügonide leidmist nimetatakse *subdivision*'iks. Praktikas kasutatakse *subdivision*'it Bezier' kõverate lähendamisel. Selleks jagatakse parameetri piirkond  $[a, b]$  pooleks, kumbki osapiirkond jällegi pooleks jne. Iga osapolünoom määrab juhtpolügoni ning tekkivat murdjoont vaadeldakse kui algse Bezier' kõvera lähendit. Juhul  $n = 3$  on selle lähendusprotsessi esimene samm järgmine. Lähtudes algsetest Bezier' punktidest  $\mathbf{b}_0^0, \mathbf{b}_1^0, \mathbf{b}_2^0, \mathbf{b}_3^0$  defineeritakse

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_0 &= \mathbf{b}_0^0, \\ \mathbf{q}_1 &= \mathbf{b}_0^1 = \frac{1}{2}\mathbf{b}_0^0 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_1^0, \\ \mathbf{q}_2 &= \mathbf{b}_0^2 = \frac{1}{4}\mathbf{b}_0^0 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_1^0 + \frac{1}{4}\mathbf{b}_2^0, \\ \mathbf{q}_3 &= \mathbf{b}_0^3 = \frac{1}{4}\mathbf{b}_0^0 + \frac{3}{4}\mathbf{b}_1^0 + \frac{3}{4}\mathbf{b}_2^0 + \frac{1}{4}\mathbf{b}_3^0, \\ \mathbf{q}_4 &= \mathbf{b}_1^2 = \frac{1}{4}\mathbf{b}_1^0 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_2^0 + \frac{1}{4}\mathbf{b}_3^0, \\ \mathbf{q}_5 &= \mathbf{b}_2^1 = \frac{1}{2}\mathbf{b}_2^0 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_3^0, \\ \mathbf{q}_6 &= \mathbf{b}_3^0.\end{aligned}$$

Nii saadud punktid  $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_6$  defineerivad murdjoone, mis on esimeseks lähendiks. Rakendades samu lineaarteisendusi punktidele  $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_3$  ja  $\mathbf{q}_3, \dots, \mathbf{q}_6$  defineeritakse järgmine lähend. Jne. Küsimus on, kas ja kui hästi nii defineeritud murdjoon lähendab algset kõverat.

## 4.2 Juhtpolügon kui Bezier' kõvera lähend

Bezier' kõvera väikese segmendi korral on tema juhtpolügon talle küllaltki heaks lähendiks. Vaatleme selleks järgmist teoreemi (vt [6], lk 29).

**Teoreem 4.1.** *Vaatleme polünoomi  $\mathbf{p}(u)$ ,  $u \in [a, b]$ , suvalist segmenti  $u \in [c, c+nh]$ . Olgu selle segmendi Bezier' punktid  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$ . Defineerime parameetrid  $c_i = c + ih$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Siis leidub konstant  $M$ , mis ei sõltu parameetri  $c$  valikust, nii, et*

$$\max_i \|\mathbf{p}(c_i) - \mathbf{b}_i\| \leq Mh^2.$$

*Tõestus.* Esitame iga kontrollpunkti polaarkuju abil kui

$$\mathbf{b}_i = P(\underbrace{c, \dots, c}_{n-i}, \underbrace{c + nh, \dots, c + nh}_i)$$

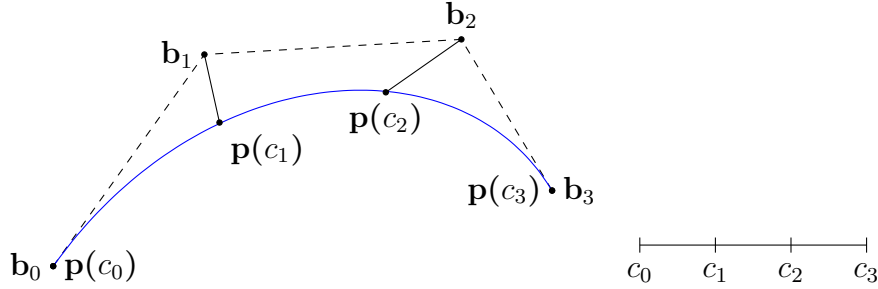


seejärel kasutame Tayloriga valemit

$$\begin{aligned}
P(\underbrace{c, \dots, c}_{n-i}, \underbrace{c+nh, \dots, c+nh}_i) &= \\
&= P(c_i, \dots, c_i) + \sum_{j=1}^{n-i} \frac{\partial P(c_i, \dots, c_i)}{\partial u_j} (-ih) + \sum_{j=n-i+1}^n \frac{\partial P(c_i, \dots, c_i)}{\partial u_j} (n-i)h + O(h^2) = \\
&= P(c_i, \dots, c_i) + \frac{\partial P(c_i, \dots, c_i)}{\partial u_1} \underbrace{\left( \sum_{j=1}^{n-i} (-ih) + \sum_{j=n-i+1}^n (n-i)h \right)}_{=0} + O(h^2) = \\
&= \mathbf{p}(c_i) + O(h^2)
\end{aligned}$$

Kasutasime tõestuses asjaolu, et  $P$  sümmeetrilisuse tõttu on kõik osatuletised võrdsed.  $\square$

Joonisel 15 on esitatud kontrollpolügon  $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3$  ja sellele vastav kuup Bezier' kõver  $\mathbf{p}(u)$ ,  $u \in [a, b]$ . Näeme, et kaugused punktide  $\mathbf{b}_0$  ja  $\mathbf{p}(c_0)$  ning  $\mathbf{b}_3$  ja  $\mathbf{p}(c_3)$  vahel on võrdsed nulliga. Teoreemi 4.1 põhjal saab hinnangu kaugusele  $\max\{\|\mathbf{p}(c_1) - \mathbf{b}_1\|, \|\mathbf{p}(c_2) - \mathbf{b}_2\|\}$ .



Joonis 15: Polügon  $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3$ , koos vastava Bezier' kõvera ning kaugustega  $\|\mathbf{p}(c_i) - \mathbf{b}_i\|_2$ .

**Märkus.** Maksimumnormi  $\|\cdot\|_\infty$  korral on  $M$  vähimaks võimalikuks väärtuseks (vt [6], lk 30)

$$\max_{i=0, \dots, n-2} \|\Delta^2 \mathbf{b}_i\|_\infty \cdot \lfloor n/2 \rfloor \cdot \lceil n/2 \rceil / 2n.$$

Näiteks kuuppolünoomide ( $n = 3$ ) korral

$$M = \frac{1}{3} \max \{ \|\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_0\|_\infty, \|\mathbf{b}_3 - 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1\|_\infty \}.$$

### 4.3 *Subdivision* kui polügoni järjestikune parendamine

Olgu antud mingi juhtpolügon. See koosneb tippudest ja servadest. *Subdivision* on selle polügoni järjestikune parendamine lisades juurde uusi tippe ning sõltuvalt algoritmist vanu tippe eemaldades või alles jättes. Algoritme kirjeldades kasutame termineid vana polügon ja uus polügon ning näitame ära, kuidas vana polügoni tippude abil on defineeritud uue polügoni tipud. Üleminekut vanalt polügonilt uuele käsitleme algoritmi ühe sammuna.

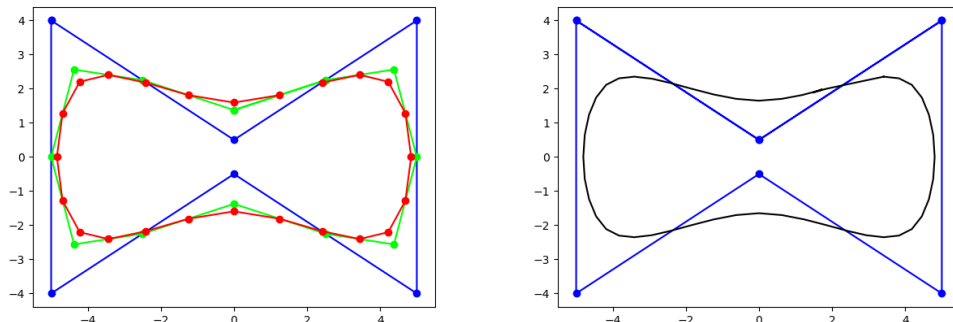
Uue polügoni tipud defineeritakse alati mingi lineaarkombinatsioonina vana-dest tippudest, seda lineaarkombinatsiooni nimetatakse šablooniks. Selles peatüks vaatleme lähemalt nelja algoritmi, mis kõik on ühtlased, statsionaarsed ja sümmeetrilised. Ühtlasus tähendab siin seda, et sama šabloon on kasutusel kõikjal üle terve polügoni. Mitteühtlase šablooni korral võib näiteks polügoni otspunktide juures olla kasutusel mõni teine lineaarkombinatsioon uute tippude defineerimiseks. Statsionaarne tähendab seda, et igal sammul kasutatakse sama šablooni. Sümmeetrilisus tähendab seda, et piirkõvera kuju ja ka igal sammul tekkiva uue polügoni kuju ei sõltu sellest, kumb polügoni ots loetakse alguseks, kumb lõpuks.

**Näide 4.1.** Vaatleme juhtu, kus vana polügoni tipud olgu  $P_i$ ,  $i \in 2\mathbb{Z}$ . Siin võib vaadelda tsüklilist juhtu, kus mingi  $k$  korral  $P_{i+2k} = P_i \forall i$  või pseudolõplikku juhtu, kus on fikseeritud  $k, l \in 2\mathbb{Z}$ ,  $k < l$ , nii, et  $P_i = P_k$  iga  $i \in 2\mathbb{Z}$ ,  $i < k$ , korral ja  $P_i = P_l$  iga  $i \in 2\mathbb{Z}$ ,  $i > l$ , korral. Defineerime uued tipud  $p_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , järgmiselt

$$\begin{aligned} p_{2i} &= \frac{1}{8}P_{2i-2} + \frac{6}{8}P_{2i} + \frac{1}{8}P_{2i+2}, \quad i \in \mathbb{Z}, \\ p_{2i+1} &= \frac{1}{2}P_{2i} + \frac{1}{2}P_{2i+2}, \quad i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Sellist skeemi, kus igal sammul tippude arv (ligikaudu) kahekordistub, nimetatakse binaarseks. Ligikaudsusest räägime siin seetõttu, et kui algset polügoni  $P_i$ ,  $i = 0, 2, 4, \dots, 2k$ , vaadelda lõplikuna (siin on  $k + 1$  tippu), siis uues polügonis on defineeritud tipud  $p_1, p_2, \dots, p_{2k-2}, p_{2k-1}$  ( $2k - 1$  tippu). Seega tipud kahekordistatakse, aga otspunktide juurest kaovad 3 tippu ära. Seda probleemi ei teki, kui vaadelda tsüklilist juhtu.

Kirjeldatud algoritmi tulemusel tekkiv piirkõver on kuup Bezier' liitkõver ehk kuupsplain (vt [7], lk 50). Esimesed kaks sammu ja piirkõver on kujutatud joonisel 16.



Joonis 16: Algne polügon on sinine, esimesel sammul saadud polügon roheline, teisel sammul saadud polügon punane ning piirkõver musta värvi.

**Näide 4.2.** Antud on polügon tippudega  $P_i$ ,  $i \in 2\mathbb{Z}$ . Defineerime uued tipud järgmiselt

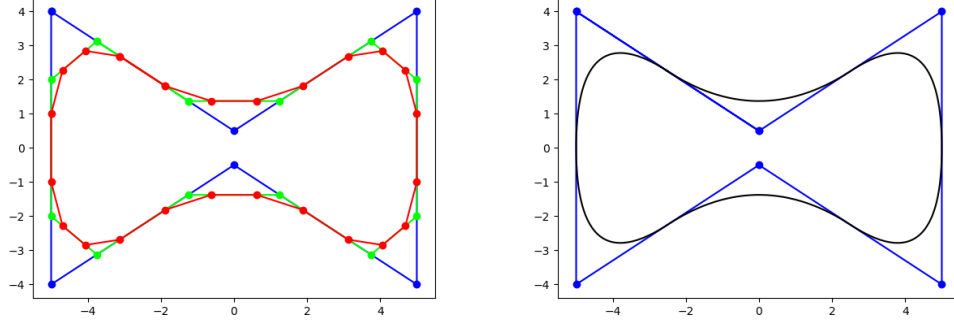
$$\begin{aligned} p_{2i} &= \frac{3}{4}P_{2i} + \frac{1}{4}P_{2i+2}, \quad i \in \mathbb{Z}, \\ p_{2i+1} &= \frac{1}{4}P_{2i} + \frac{3}{4}P_{2i+2}, \quad i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Algoritmi tulemusel tekkinud piirkõver on ruut Bezier' kõver ühtlasel võrgul, mis interpolateerib algse juhtpolügoni külgede keskpunkte (vt [7], lk 52). Seda algoritmi nimetatakse Chaikin'i algoritmiks (1:2:1 reegliks). Ka siin on tegemist binaarse skeemiga (igal sammul tippude arv (ligikaudu) kahekordistub). Esimesed kaks sammu ja piirkõver on kujutatud joonisel 17.

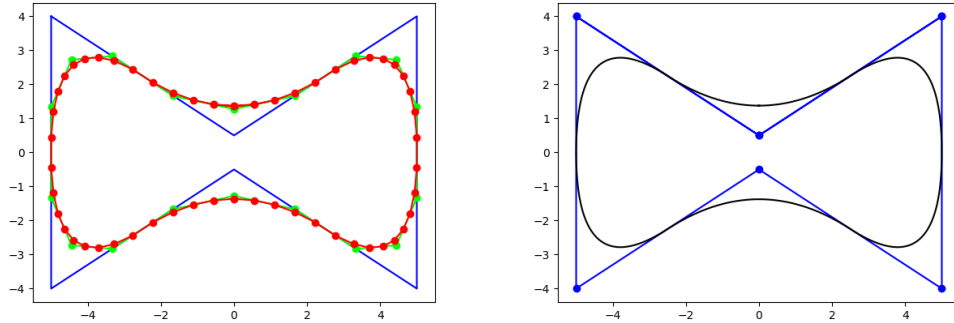
**Näide 4.3.** Ternaarse skeemi näitena vaatleme algoritmi, kus antud on polügon tippudega  $P_i$ ,  $i \in 3\mathbb{Z}$ , ning uued tipud defineeritakse järgmiselt

$$\begin{aligned} p_{3i-1} &= \frac{1}{3}P_{3i-3} + \frac{2}{3}P_{3i}, \quad i \in \mathbb{Z}, \\ p_{3i} &= \frac{1}{9}P_{3i-3} + \frac{7}{9}P_{3i} + \frac{1}{9}P_{3i+3}, \quad i \in \mathbb{Z}, \\ p_{3i+1} &= \frac{2}{3}P_{3i} + \frac{1}{3}P_{3i+3}, \quad i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ka selle algoritmi tulemusel tekkinud piirkõver on ruut Bezier' kõver ühtlasel võrgul, mis interpolateerib algse juhtpolügoni külgede keskpunkte (vt [7], lk 53), nagu eelmiseski näites. Algoritmi rakendamist on kujutatud joonisel 18.



Joonis 17: Algne polügon on sinine, esimesel sammul saadud polügon roheline, teisel sammul saadud polügon punane ning piirkõver musta värvi.



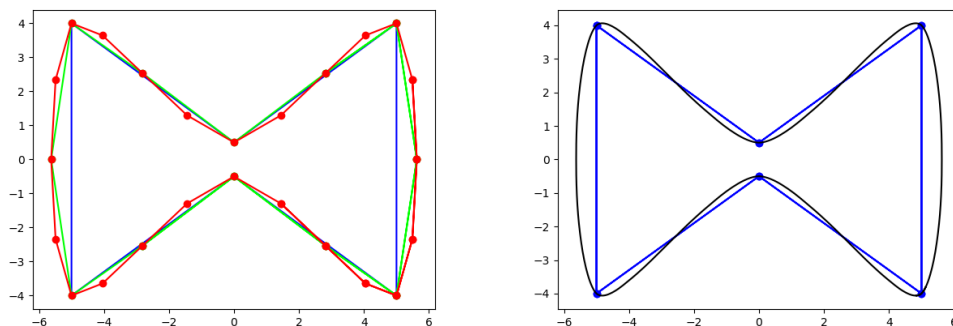
Joonis 18: Algne polügon on sinine, esimesel sammul saadud polügon roheline, teisel sammul saadud polügon punane ning piirkõver musta värvi.

**Näide 4.4.** Viimase näitena vaatleme Dubuc'i 4-punkti skeemi. Antud on polügon tippudega  $P_i$ ,  $i \in 2\mathbb{Z}$ . Algoritmi igal sammul jäävad kõik vanad tipud alles, tippude arv (ligikaudu) kahekordistub

$$\begin{aligned} p_{2i} &= P_{2i}, \quad i \in \mathbb{Z}, \\ p_{2i+1} &= -\frac{1}{16}P_{2i-2} + \frac{9}{16}P_{2i} + \frac{9}{16}P_{2i+2} - \frac{1}{16}P_{2i+4}, \quad i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

4-punkti skeemiks nimetatakse seda seetõttu, et uued tipud  $p_{2i+1}$  on leitud paigutades interpoleeriva kuuppolünoomi  $S$  läbi nelja punkti  $P_{2i-2}, \dots, P_{2i+4}$  nii, et  $S(0) = P_{2i-2}$ ,  $S(1/3) = P_{2i}$ ,  $S(2/3) = P_{2i+2}$ ,  $S(1) = P_{2i+4}$  ning valides uue polügoni uueks tipuks  $p_{2i+1} = S(1/2)$ . Algoritmi esimene samm ja piirkõver on kujutatud

joonisel 19.



Joonis 19: Algne polügon on sinine, esimesel sammul saadud polügon roheline, teisel sammul saadud polügon punane ning piirkõver musta värvi.

Vaatleme nüüd võimalusi, kuidas *subdivision* algoritme esitada.

Esimene võimalus on ära kirjeldada šabloonid. Iga algoritmi korral šabloonide arv näitab ära selle skeemi aarsuse. Kirjeldatud näidete korral on šabloonid toodud tabelis 1.

Näide 4.1	Näide 4.2	Näide 4.3	Näide 4.4
$[1,6,1]/8$	$[3,1]/4$	$[3,6]/9$	$[16]/16$
$[4,4]/8$	$[1,3]/4$	$[1,7,1]/9$	$[-1,9,9,-1]/16$
		$[6,3]/9$	

Tabel 1: Näidete 4.1–4.4 šabloonid

Šabloonid koosnevad ratsionaalarvudest, mille lugejad on esitatud nurksulgude vahel, ühine nimetaja ühekordselt murrujoone all. Iga šablooni näol on tegemist afiinse kombinatsiooni kordajatega, seega iga šablooni kordajate summa on 1.

Teine võimalus *subdivision* skeemi esitamiseks on maatrikskuju, kus maatriksi

ja vanade tippude vektori korrutis annab uute tippude vektori. Näite 4.1 korral

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1/8 & 3/4 & 1/8 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1/8 & 3/4 & 1/8 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1/8 & 3/4 & 1/8 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ P_{2i-2} \\ P_{2i} \\ P_{2i+2} \\ P_{2i+4} \\ P_{2i+6} \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ p_{2i} \\ p_{2i+1} \\ p_{2i+2} \\ p_{2i+3} \\ p_{2i+4} \\ p_{2i+5} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Näite 4.2 korral

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 3/4 & 1/4 & 0 & \dots \\ \dots & 1/4 & 3/4 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 3/4 & 1/4 & \dots \\ \dots & 0 & 1/4 & 3/4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ P_{2i} \\ P_{2i+2} \\ P_{2i+4} \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ p_{2i} \\ p_{2i+1} \\ p_{2i+2} \\ p_{2i+3} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Näite 4.3 korral

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1/9 & 7/9 & 1/9 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1/9 & 7/9 & 1/9 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1/9 & 7/9 & 1/9 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ P_{3i-3} \\ P_{3i} \\ P_{3i+3} \\ P_{3i+6} \\ P_{3i+9} \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ p_{3i-1} \\ p_{3i} \\ p_{3i+1} \\ p_{3i+2} \\ p_{3i+3} \\ p_{3i+4} \\ p_{3i+5} \\ p_{3i+6} \\ p_{3i+7} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Näite 4.4 korral

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -1/16 & 9/16 & 9/16 & -1/16 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & -1/16 & 9/16 & 9/16 & -1/16 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & -1/16 & 9/16 & 9/16 & -1/16 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & -1/16 & 9/16 & 9/16 & -1/16 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ P_{2i-4} \\ P_{2i-2} \\ P_{2i} \\ P_{2i+2} \\ P_{2i+4} \\ P_{2i+6} \\ P_{2i+8} \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ p_{2i-1} \\ p_{2i} \\ p_{2i+1} \\ p_{2i+2} \\ p_{2i+3} \\ p_{2i+4} \\ p_{2i+5} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Ülaltoodud maatriksite read on šabloonid tabelist 1. Kui me vaatame aga maatriksi veergusid, siis näeme, et kõik veerud on võrdsed, kuid eelneva veeruga võrreldes aarsuse võrra nihkes. Veerus paiknevate arvude vektorit nimetatakse *subdivision* skeemi maskiks ning see on kolmas võimalus *subdivision* skeemi kirjeldada. Näite 4.1 mask on  $\frac{1}{8}[1, 4, 6, 4, 1]$ , näite 4.2 mask on  $\frac{1}{4}[1, 3, 3, 1]$ , näite 4.3 mask  $\frac{1}{9}[1, 3, 6, 7, 6, 3, 1]$ , näite 4.4 mask on  $\frac{1}{16}[-1, 0, 9, 16, 9, 0, -1]$ .

Šabloonid näitavad, millised vanad tipud defineerivad uue tipu, mask näitab iga vana polügoni tipu jaoks, milliseid uusi tippe see mõjutab. Sümmeetriliste skeemide korral, nagu kõik meie neli näidet, on maskid iseenda palindroomid. Kasutame maski tähistamiseks vektorit  $m = (m_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , kus paaritu arvulise pikkusega maski korral  $m_i = m_{-i}$  ja paarisarvulise pikkusega maski korral  $m_{i-1} = m_{-i}$ . Näite 4.1 korral tähistame  $\frac{1}{8}[1, 4, 6, 4, 1] = [m_{-2}, m_{-1}, m_0, m_1, m_2]$ , näite 4.2 korral  $\frac{1}{4}[1, 3, 3, 1] = [m_{-2}, m_{-1}, m_0, m_1]$  jne, ülejäänud elemendid vektoris  $m$  olgu nullid. Sellisel juhul saab iga *subdivision* algoritmi esitada kujul

$$p_i = \sum_{j \in a\mathbb{Z}} m_{i-j} P_j, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (23)$$

kus  $a$  on algoritmi aarsus ja  $m$  vastava algoritmi mask,  $P_j$ ,  $j \in a\mathbb{Z}$ , vana polügoni tipud,  $p_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , uue polügoni tipud.

#### 4.4 *Subdivision* algoritmide analüüs

Eelnevas peatükis vaatlesime nelja erinevat *subdivision* algoritmi, mis kõik on määratud oma maski poolt. Teoreetiliselt võiks võtta suvalise sümmeetrilise vektori maskiks, määrata ära aarsuse ning defineerida sel moel ühtlane, statsionaarne ja

sümmeetriline *subdivision* algoritm. Nii toimides tekivad järgmised loomulikud küsimused:

- 1) Kas *subdivision* algoritmi käigus defineeritud juhtpolügonide jada koondub mingiks funktsiooniks?
- 2) Kas see funktsioon on pidev, diferentseeruv, mitu korda diferentseeruv?
- 3) Millised on piirfunktsiooni omadused? Näiteks, kas ta interpoleerib algse juhtpolügoni tippe? Kui suur osa piirkõverast muutub, kui muuta ühe algse kontrollpunkti asukohta?
- 4) Kui algandmed on mingi polünoomi väärtused, kas siis piirkõveraks on see sama polünoom, teisisõnu, missuguse astme polünoome on võimalik reprodutseerida?

Peatume neil küsimustel vaid lühidalt ning refereerime olulisemad tulemused.

Kui räägitakse *subdivision* algoritmide koonduvusest, siis mõeldakse selle all, et iga algandmete komplekti korral leidub pidev funktsioon  $f$  nii, et algoritmi poolt defineeritud polügonide jada koondub ühtlaselt funktsiooniks  $f$  (vt [3]). *Subdivision* algoritmi koonduvuseks on tarvilik, et

$$\sum_{j \in a\mathbb{Z}} m_{i-j} = 1, \quad i = 0, 1, \dots, a-1,$$

kus  $a$  on skeemi aarsus ning  $m$  mask (vt [2]). Sisuliselt tähendab see, et kõikide šabloonide summa peab olema 1, mis tagab, et maski summa on võrdne aarsusega. Näidete 4.1–4.4 korral on see tingimus täidetud.

Koonduvuse ja diferentseeruvuse uurimine taandub maskile vastava karakteristikliku polünoomi omadustele. Olgu selles punktis maski  $m = (m_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  elemendid indekseeritud nii, et esimene esimene nullist erinev element on indeksiga 0. Maskile  $m$  vastavaks karakteristiklikuks polünoomiks nimetatakse polünoomi

$$s(z) = \sum m_i z^i.$$

Seda polünoomi nimetatakse ka *subdivision* algoritmi sümboliks. Kui sümbolile  $s$  vastav binaarne skeem on koonduv, siis sümbolile

$$\left(\frac{1+z}{2}\right)^r s(z)$$

vastav binaarne skeem koondub samuti ning võrreldes sümbolile  $s$  vastava algoritmi piirkõvera siledusele on lisandunud  $r$  järku siledust [2]. Näite 4.1 korral

$$s(z) = \frac{1 + 4z + 6z^2 + 4z^3 + z^4}{8} = \left(\frac{1+z}{2}\right)^2 \frac{1 + 2z + z^2}{2}.$$



Näite 4.2 korral

$$s(z) = \frac{1 + 3z + 3z^2 + z^3}{4} = \frac{1+z}{2} \cdot \frac{1+2z+z^2}{2}.$$

Kuna *subdivision* algoritm, mis vastab maskile  $[1,2,1]/2$ , tekitab algse juhtpolügoni (šabloon  $[2]/2$  jätab kõik punktid paika, šabloon  $[1,1]/2$  lisab iga polügoni kahe tipu vahele neid tippe ühendava serva keskpunkti), siis see algoritm koondub. Näite 4.1 korral tekib kaks korda pidevalt diferentseeruv kõver ( $r = 2$ ), näite 4.2 korral üks kord pidevalt diferentseeruv kõver ( $r = 1$ ). Näite 4.3 ternaarse skeemi korral lisab karakteristikus polünoomis iga tegur  $\frac{1+z+z^2}{3}$  juurde ühe järgu siledust (vt [7], lk 98). Näite 4.3 korral

$$s(z) = \frac{1 + 3z + 6z^2 + 7z^3 + 6z^4 + 3z^5 + z^6}{9} = \left( \frac{1+z+z^2}{3} \right)^2 (1+z+z^2)$$

ning kuna ternaarne skeem  $[1,1,1]$  ei tee muud kui kolmekordistab igal sammul kõik punktid, st algne juhtpolügon säilib, siis on tulemuseks kaks korda pidevalt diferentseeruv kõver. Näite 4.4 korral on analüüs mõnevõrra keerukam, kuigi

$$s(z) = \frac{-1 + 9z^2 + 16z^3 + 9z^4 - z^6}{16} = \left( \frac{1+z}{2} \right)^3 \frac{-1 + 3z + 3z^2 - z^3}{2},$$

st sümbol jagub teguriga  $(1+z)^3$ , siis piirkõver on kõigest üks kord pidevalt diferentseeruv (vt [2]). Eespool toodud tulemustega siin vastuolu ei ole, põhjus on selles, et maskile  $[-1,3,3,-1]/2$  vastav *subdivision* algoritm ei koonu.

Näide 4.4 on esitatud näidetest ainus, mis interpolateerib algse juhtpolügoni tippe. Lisaks, kuna näite 4.4 sümbol avaldub kujul  $s(z) = (1+z)^{n+1}q(z)$ , kus  $q(z) = \frac{-1+4z-z^2}{16}$  ning  $q(1) = 1/2^n$ ,  $n = 3$ , siis antud skeem reprodutseerib kuni kolmanda astme polünoome, st kui algandmed on mingi kuuppolünoomi väärtused, siis *subdivision* algoritmi abil defineeritud piirkõveraks on seesama polünoom (vt [1]).

## Kokkuvõte

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on tutvustada geomeetrilise modelleerimise temaatikat. Peamised uurimisteemad on Bezier' liitkõverate ja *subdivision* algoritmide tulemusena tekkivate piirkõveratega interpoleerimine ja lähendamine, mille tarbeks defineeritakse vajalikud põhimõisted ja tehakse ülevaade tähtsamatest tulemustest, seejuures sõnastatakse tingimused, mis määravad otsitava kõvera olemasolu ja sileduse.

Töö on valdavalt referatiivne ja tugineb peamiselt allikatele [4], [6] ja [7]. Iseisev töö hõlmab materjali põhjalikumalt lahti kirjutamist ning näidete toomist, seehulgas ka joonistega illustreerimist.

Töö esimeses pooles keskendutakse Bezier' kõverate uurimisele. Analüüsitakse nii ruut- kui kuup Bezier' liitkõveratega interpoleerimist, tuletatakse võrrandisüsteemid kontrollpunktide määramiseks ning analüüsitakse vastavate süsteemide lähenduvust. Töö teises pooles vaadeldakse nelja *subdivision* algoritmi ning nende põhiomadusi.

Edasisi võimalikke uurimissuundi on mitu. Kuna selles töös vaadeldakse kinniste Bezier' liitkõveratega interpoleerimist, siis saaks põhjalikumalt uurida, milline on olukord lahtiste juhtpolügonide korral. Sel juhul on kõvera määramiseks vaja kasutada rajatingimusi. Ka *subdivision* algoritmide rakendamisel võivad lahtiste polügonide korral polügonide otspunktid kaotsi minna. Saab uurida, kuidas käitub algoritm, kui lõplikke algandmeid vaadelda mõlemast otsast lõpmatu polügonina, kas siis piirkõvera omadused säilivad. *Subdivision* algoritmide puhul saab süstemaatilisemalt uurida erinevate algoritmide koonduvust ja piirkõvera omadusi.

## Viited

- [1] Conti, C. & Hormann, K. (2011). Polynomial reproduction for univariate subdivision schemes of any arity. *Journal of Approximation Theory*, 163.4, lk 413-437.
- [2] Dyn, N. (2009). Linear and Nonlinear Subdivision Schemes in Geometric Modeling. *Foundations of computational mathematics, Hong Kong 2008*, 363, lk 68–92.
- [3] Dyn, N. & Levin, D. (2002). Subdivision schemes in geometric modelling. *Acta Numerica*, 11.0, lk 73-144.
- [4] Farin, G. (2002) *Curves and surfaces for CAGD: a practical guide*. Morgan Kaufmann.
- [5] Farouki, R., T. (2012). The Bernstein polynomial basis: A centennial retrospective. *Computer Aided Geometric Design*, 29.6, lk 379-419.
- [6] Prautzsch, H., Boehm, W. & Paluszny, M. (2002) *Bézier and B-spline techniques*. Springer Science & Business Media.
- [7] Sabin, M. (2010) *Analysis and Design of Univariate Subdivision Schemes*. Springer Science & Business Media.
- [8] Завьялов, Ю., С., Квасов, Б., И. & Мирошниченко В., Л. (1980). *Методы сплайн-функций*. Москва: Наука.

## **Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks**

Mina, Laura Karu,

- 1) annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose Parameetriliste Bezier' liitkõverate konstrueerimine, mille juhendaja on Evely Kirsiaed, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
- 2) Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
- 3) Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
- 4) Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Laura Karu  
18.05.2021